



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du

## DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

**Délivré par :**

Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP)

**Discipline ou spécialité :**

Surfaces Interfaces Continentales Hydrologie

---

**Présentée et soutenue par :**

M. BENJAMIN FRY

le vendredi 13 décembre 2019

**Titre :**

Modélisation multi-échelle d'un lit granulaire entraîné par un écoulement  
cisailé

---

**Ecole doctorale :**

Sciences de l'Univers de l'Environnement et de l'Espace (SDU2E)

**Unité de recherche :**

Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse ( IMFT)

**Directeur(s) de Thèse :**

M. THOMAS BONOMETTI

M. LAURENT LACAZE

**Rapporteurs :**

M. ERIC LAJEUNESSE, INST PHYSIQUE DU GLOBE PARIS

M. FRANÇOIS PETERS, UNIVERSITE DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS

M. STÉPHANE VINCENT, UNIVERSITE PARIS 12

**Membre(s) du jury :**

M. ALESSANDRO BOTTARO, UNIVERSITA DEGLI STUDI DI GENOVA, Président

M. FRANÇOIS CHARRU, UNIVERSITE TOULOUSE 3, Membre

M. LAURENT LACAZE, CNRS TOULOUSE, Membre

M. THOMAS BONOMETTI, TOULOUSE INP, Membre



Je dédie cette thèse à mon fils Léo,





## Remerciements

Je souhaite d'abord remercier mes directeurs de thèse : Thomas BONOMETTI et Laurent LACAZE, ainsi que François CHARRU et Alessandro BOTTARO qui ont perdu ce rôle pendant ces trois années mais n'ont pas cessé de s'occuper de moi pour autant. Leur encadrement, leur disponibilité, leur rigueur scientifique et leurs méthodes de travail m'ont été d'une grande aide et m'ont permis de réaliser cette thèse dans les meilleures conditions. La liberté de travail qu'ils m'ont donné n'a pas toujours été évidente à gérer, en particulier au début de cette aventure. Cette expérience m'a fait progresser sur bien des aspects - scientifique, pédagogique, humain et concernant la transmission de mes travaux - je vous remercie pour tout cela. Je souhaite encore remercier Alessandro pour m'avoir fait confiance et avoir financé ma thèse grâce au projet BIOSKINS financé via une Chaire d'attractivité Idex.

Je souhaite aussi tout particulièrement remercier Sylvie SENNY pour son accompagnement sans faille durant ses quelques années passées dans le groupe Fluide & Particules (anciennement HEGIE, anciennement OTE). Je remercie aussi André ROUCH pour les bons moments passés à discuter de la vie en générale et de celle au sein du laboratoire. J'ai réalisé cette thèse de doctorat à l'IMFT et pour cette raison je souhaite en remercier son directeur Éric CLIMENT.

Un grand merci à tout le personnel de soutien à la recherche et en particulier au service de calcul scientifique COSINUS et Anaïg PEDRONO pour son aide et son expertise sur les codes de calculs utilisés. Je souhaite également remercier CALMIP, et plus particulièrement Nicolas RENON, pour les centaines de milliers d'heures de calcul sur les super-calculateurs EOS, puis OLYMPE, ainsi que pour l'aide afin d'optimiser les calculs effectués.

Je remercie également la Prépa des INP pour m'avoir confié ses élèves lors des enseignements que j'y ai effectué et plus particulièrement Jacques LEQUIN et Magali MOURGUES qui m'ont accompagné lors de cette expérience très enrichissante. Je souhaite aussi remercier le directeur de Toulouse INP Olivier SIMONIN pour les échanges fertiles que nous avons pu avoir à la fin de ma thèse.

Je souhaite maintenant remercier l'ensemble des doctorants avec lesquels j'ai passé ces trois années à l'IMFT et plus particulièrement Nadia SELMANI, Leo GUIOT DE LA ROCHÈRE, Sylvain MARRAGOU et Gorkem OZTARLIK pour ces nombreuses heures passées à discuter autour d'un café.

Il est temps de remercier mes parents, Muriel et Frédérick, qui m'ont toujours soutenu et poussé à me dépasser. Ils m'ont aidé à développer mon esprit critique et ma rigueur depuis mon plus jeune âge.

Je souhaite enfin remercier la personne sans qui tout ce travail n'aurait pas été possible : Caroline MAZZANTI. Elle m'a soutenu et supporté au quotidien, même dans les moments les plus difficiles ; en particulier lors de la rédaction de ce manuscrit, qu'elle m'a aidé à corriger, ou lorsque je préparais les diverses présentations que j'ai effectué durant ce travail de thèse.

## Résumé :

Dans cette thèse, on étudie le transport granulaire par charriage en régime établi d'un lit de grains soumis à un écoulement de Couette laminaire pour un rapport de densité fluide-grain de 2.5 et une gamme de nombre de Reynolds particulaire,  $Re_p \in [0.1, 10]$ , et de nombre de Shields,  $\theta \in [0.1, 0.7]$ . Toutes les échelles de cet écoulement diphasique (à l'exception des effets de lubrification) sont décrites via la résolution numérique des équations de Navier-Stokes en prenant en compte la présence des particules par une méthode de frontières immergées (IBM) couplée à un solveur granulaire (méthode des éléments discrets - DEM) qui résout les équations de Newton pour chaque particule ainsi que les contacts et frottements entre grains (résolution à l'échelle microscopique). Un changement d'échelle est ensuite effectué afin d'obtenir une description de l'écoulement via des champs continus équivalents (description à l'échelle mésoscopique). Les simulations IBM-DEM permettent de quantifier chacun des termes du modèle dit mésoscopique et de caractériser la rhéologie de chaque phase ainsi que du mélange. On effectue finalement un second changement d'échelle afin de réduire l'écoulement de grains observé à une singularité, qui correspond à une condition limite du point de vue de l'écoulement du fluide. Cette condition est du type de NAVIER. Les simulations IBM-DEM montrent que la longueur dite de glissement "équivalente" est directement proportionnelle au nombre de Shields.

## Abstract :

In this work, we consider the steady transport of a granular medium by a laminar Couette flow for a fixed density ratio of 2.5 and a range of particle Reynolds number,  $Re_p \in [0.1, 10]$ , and Shields number  $\theta \in [0.1, 0.7]$ . All scales of this two-phase flow are captured (except for the lubrication effects). By numerically solving the Navier-Stokes equations, taking into account the presence of particles using an Immersed Boundary Method (IBM) coupled to a granular solver (Discrete Elements Method - DEM) which solves the Newton equations for each particle, in particular grain-grain interactions (resolution at the microscopic scale). Up-scaling is then performed to describe the flow via equivalent continuous quantities (description at the mesoscopic scale). IBM-DEM simulations allow to quantify all the terms of the so-called mesoscopic model and to characterize the rheology of each phase and that of the equivalent mixture. A second up-scaling is finally performed to reduce the granular flow to a singularity, which corresponds to a boundary condition from the point of view of fluid. The boundary condition is of NAVIER's type. The IBM-DEM simulations suggest that the corresponding "equivalent" slip-length scales as  $\theta$ .

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Les milieux granulaires . . . . .	4
1.2	Transport de grains . . . . .	6
1.3	Échelles de description . . . . .	8
1.4	Objectifs et plan de la thèse . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Méthodes et validations</b>	<b>11</b>
2.1	Mise en équation du problème . . . . .	12
2.2	Résolution numérique des équations des grains (GraDyM) . . . . .	13
2.2.1	Modèle de contact . . . . .	13
2.2.2	Schéma d'avancement en temps . . . . .	16
2.2.3	Schéma récapitulatif de la méthode de résolution des grains . . . . .	17
2.3	Résolution numérique de la phase fluide (JADIM) . . . . .	18
2.3.1	La méthode de frontières immergées (IBM) . . . . .	18
2.3.2	Procédure d'avancement temporel . . . . .	23
2.3.3	Schéma récapitulatif de la méthode de résolution de la phase fluide . . . . .	24
2.4	Couplage JADIM/GraDyM . . . . .	25
2.4.1	Schéma récapitulatif de la méthode de résolution dans son ensemble . . . . .	26
2.5	Validation de la méthode . . . . .	26
2.5.1	Rotation d'un cylindre dans un écoulement cisailé . . . . .	27
2.5.2	Sédimentation d'une sphère . . . . .	32
2.5.3	Écoulement cisailé autour d'une sphère proche d'une paroi . . . . .	36
2.5.4	Écoulement dans un milieu poreux . . . . .	40
<b>3</b>	<b>Set-up et considérations préliminaires</b>	<b>51</b>
3.1	Préparation des simulations . . . . .	52
3.1.1	Sédimentation d'un lit granulaire sec . . . . .	52
3.1.2	Initialisation de l'écoulement du fluide . . . . .	53
3.1.3	Simulation d'un lit de grains immergé dans un écoulement cisailé . . . . .	53
3.2	Évolution temporelle d'un lit de grains cisailé . . . . .	54
3.3	Prise de moyennes temporelles . . . . .	63
3.4	Convergences en domaine et en maillage . . . . .	65

<b>4</b>	<b>Physique du transport granulaire en régime permanent</b>	<b>69</b>
4.1	Analyse dimensionnelle du problème d'un lit de grains cisailé . . . . .	71
4.2	Un modèle analytique en régime laminaire (MOUILLERON <i>et al.</i> (2009)) . . . . .	73
4.3	Caractérisation du transport granulaire . . . . .	76
4.3.1	Débit granulaire saturé . . . . .	76
4.3.2	Couche de grains mobiles . . . . .	80
4.3.3	Profils de vitesse des particules . . . . .	87
4.3.4	Distributions de probabilité des vitesses des grains . . . . .	94
4.3.5	Densités surfaciques de grains mobiles et vitesses moyennes . . . . .	107
4.4	Influence des effets de lubrification . . . . .	115
<b>5</b>	<b>Changement d'échelle &amp; Milieux effectifs</b>	<b>125</b>
5.1	De l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique . . . . .	126
5.1.1	Fractions volumiques locales . . . . .	127
5.1.2	Grandeurs mésoscopiques . . . . .	128
5.1.3	Conservation de la masse à l'échelle mésoscopique . . . . .	128
5.1.4	Conservation de la quantité de mouvement à l'échelle mésoscopique . . . .	130
5.1.5	Fonction de pondération & volume élémentaire représentatif . . . . .	132
5.2	Description mésoscopique d'un lit de grains soumis à un écoulement cisailé . . . .	134
5.2.1	Cinématique des phases équivalentes . . . . .	134
5.2.2	Bilan de quantité de mouvement de la phase fluide . . . . .	138
5.2.3	Bilan de quantité de mouvement de la phase granulaire . . . . .	142
5.2.4	Bilan de quantité de mouvement de la phase de mélange . . . . .	145
5.2.5	Pression granulaire et différences de contraintes normales . . . . .	147
5.2.6	Couplage entre les phases fluide et granulaire - $n\langle f \rangle^p$ . . . . .	149
5.2.7	Rhéologie des phases équivalentes . . . . .	154
5.3	De l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique . . . . .	188
5.3.1	Homogénéisation de la transition fluide - milieux granulaire immergé . . .	188
5.3.2	Condition limite équivalente . . . . .	192
<b>6</b>	<b>Conclusion &amp; perspectives</b>	<b>197</b>
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>201</b>

# Chapitre 1

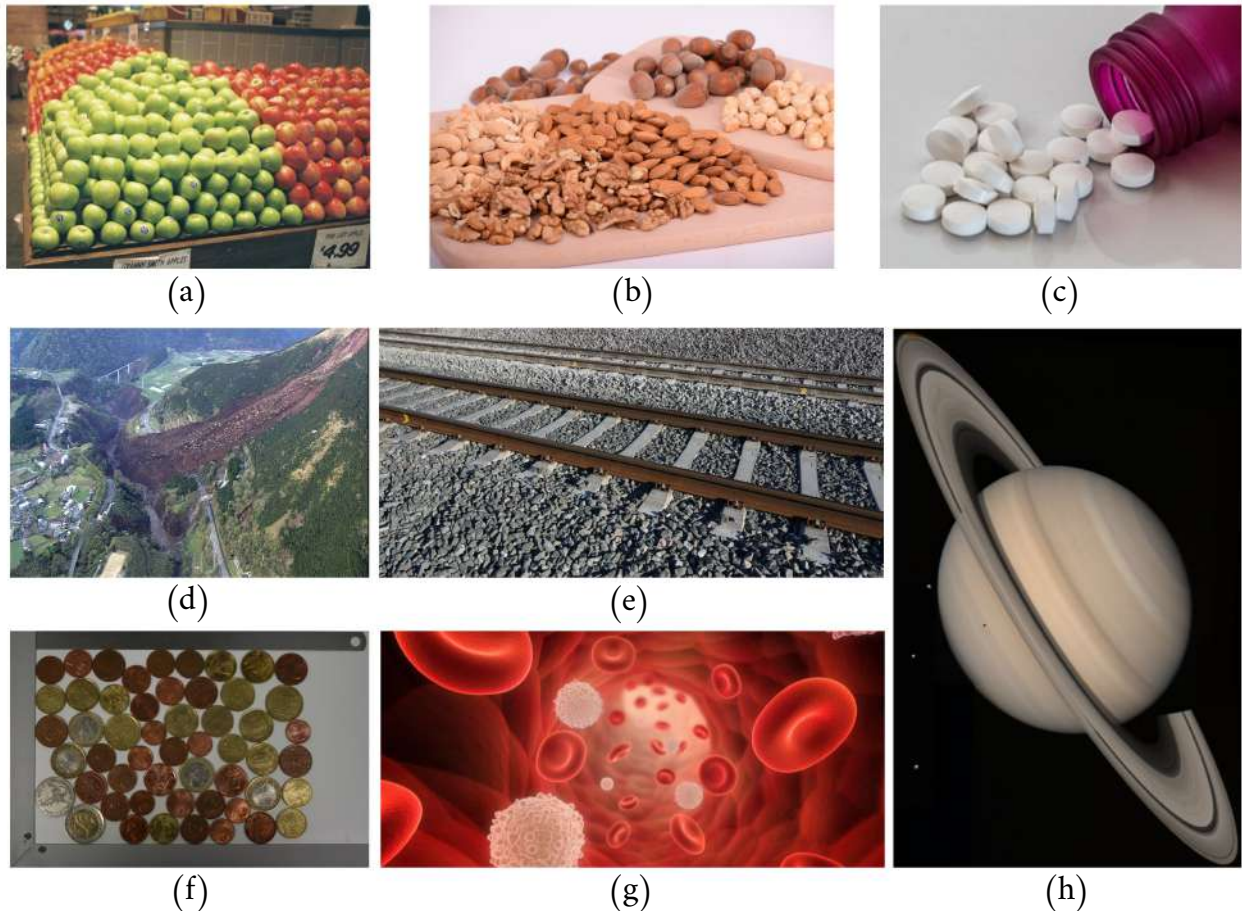
## Introduction

### Sommaire

1.1	Les milieux granulaires . . . . .	4
1.2	Transport de grains . . . . .	6
1.3	Échelles de description . . . . .	8
1.4	Objectifs et plan de la thèse . . . . .	10

## 1.1 Les milieux granulaires

Un milieu divisé, souvent nommé milieu granulaire par abus de langage, est un matériau constitué d'un ensemble de particules, les grains, plongés dans une phase continue (l'air ou l'eau en général), appelé fluide porteur. On côtoie ce type de matériau au quotidien. On pense souvent d'abord au sable d'une plage, ou d'une dune dans un désert mais ces milieux ne se limitent pas à cela. Sur le plan industriel, on estime que plus de 50% des produits vendus mettent en jeu ce type de matériaux dans leur élaboration ou dans leur forme finale (BATES (2006)). La matière en grains représente le deuxième matériau le plus utilisé dans l'industrie après l'eau (DURAN (1997)).



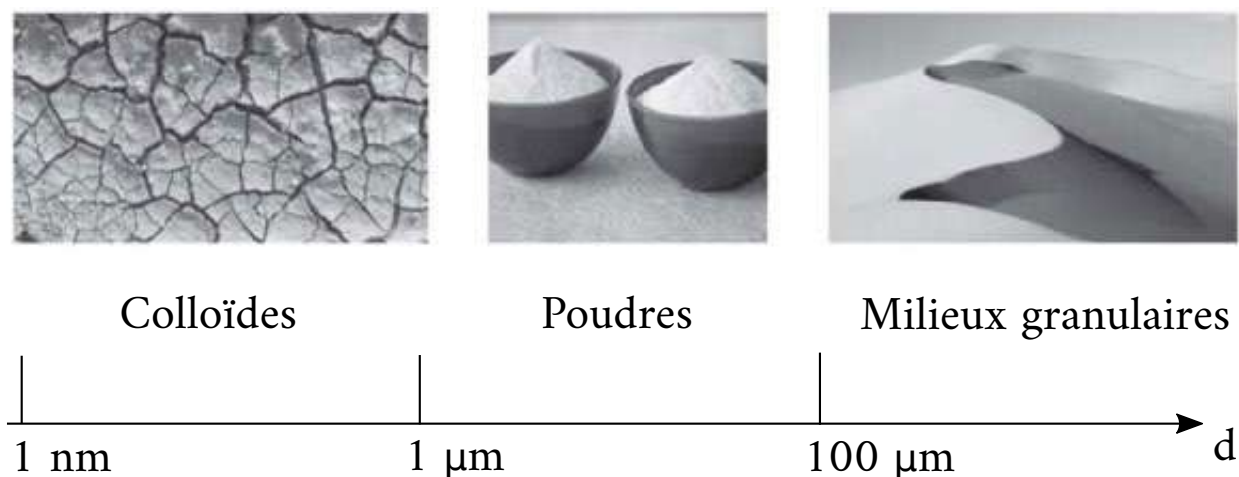
**FIGURE 1.1** – Exemples de milieux granulaires. (a) : pommes arrangées sur un réseau cristallin (crédits : Jack Lyons, pexels); (b) : tas de fruits à coque (amandes, noix, noisettes, etc...); (c) : avalanche de comprimés, médicaments; (d) : coulée de boue suite à un tremblement de terre sur l'île de Kyushu (Japon) le 16/04/2016 (crédits : AFP - MINISTRY OF DEFENCE); (e) : ballast sur lequel repose une voie de chemin de fer; (f) : milieu granulaire 2D constitué de pièces de monnaie; (g) : sang, suspension de particules déformables ( $\varnothing \simeq 7 \mu\text{m}$ ); (h) : anneaux de Saturne.

On peut citer l'extraction et le transport de minerai, les poudres de ciment ou servant à la fabrication des peintures. Les plastiques en tant que matière premières sont généralement conditionnés sous forme de petits granules de plastique que l'on fait fondre pour les mouler sous toutes les formes. L'industrie pharmaceutique manipule aussi ces matériaux, que ce soit les poudres lors de la fabrication des médicaments ou bien les médicaments eux-mêmes (capsules, comprimés, en poudre). Ils sont également très présents dans l'industrie agroalimentaire; on peut citer les céréales (blé, riz, maïs, etc...), les aliments sous forme de granules ou de poudre (pour les animaux et la farine ou la semoule par exemple), les fruits et légumes (noisettes, café, pommes, betteraves, pommes de terre,

etc...), le sel, les épices et le sucre. Dans tous ces secteurs se pose les questions du transport, du stockage et du mélange de ces matériaux.

Les milieux granulaires sont également présent dans la nature. On a déjà cité le sable, mais les graviers, les roches lors de glissements de terrain, les boues, les galets et sédiments au fond des cours d'eau, les avalanches et aussi les poussières martiennes, les anneaux de Saturne ou les ceintures d'astéroïdes et même le sang (sérum contenant principalement des globules rouges et blancs) sont autant d'exemples de milieux divisés naturels. Dans ces cas, c'est souvent pour des raisons de prévision des risques ou des coûts d'entretien que ces milieux sont étudiés.

Pour l'instant, on a principalement parlé de milieux granulaires dont les particules sont solides mais les émulsions (lait, pastis, mayonnaise) ou les mousses (à raser ou celle d'une bière) sont également des milieux divisés.



**FIGURE 1.2** – Classification physique des milieux divisés en fonction du diamètre des particules (image tirée de ANDREOTTI et al. (2012)).

Ici, nous nous limiterons aux milieux dont les grains sont solides. On classe généralement ces milieux en fonction des interactions entre les particules qui les constituent et ces interactions dépendent principalement de la taille des grains (figure 1.2). Elles sont dominées par les forces de contacts pour les matériaux que l'on continuera d'appeler des milieux granulaires par la suite et qui sont constitués de "gros" grains (qui ont typiquement un diamètre  $d \geq 0.1 \text{ mm}$ ). Pour les particules dont le diamètre  $d$  est compris entre  $1$  et  $100 \mu\text{m}$  on parlera de poudres (par exemple les farines). Dans les poudres, les particules interagissent via les interactions de Van der Waals de façon non négligeable. Et pour les particules encore plus petites ( $d \leq 1 \mu\text{m}$ ), on parlera de colloïdes. Dans ce cas, l'agitation thermique ne peut plus être négligée (peinture, lait, aérosols). L'étude effectuée lors de ce travail de thèse porte exclusivement sur les milieux granulaires et on considérera uniquement les interactions inter-particules liées aux contacts (et celles via le fluide porteur).

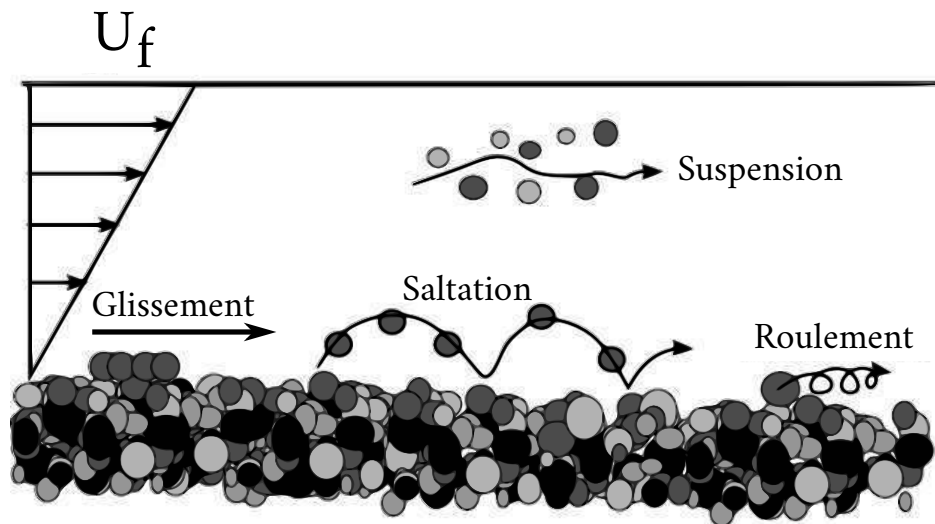
D'autres interactions peuvent intervenir entre les grains, par exemple la cohésion capillaire pour du sable mouillé. Ces forces interviennent au travers de ponts capillaires qui se forment entre les particules lorsque les grains sont plongés dans un milieu constitué d'air et d'eau (ou d'autres fluides non miscibles ne possédant pas la même affinité avec les particules). Ce type d'interaction ne sera pas considéré ici, nous considérerons des milieux granulaires complètement immergés dans un fluide porteur unique.

Une autre caractéristique importante des milieux granulaires est la distribution de taille et de forme des particules. Lors d'un glissement de terrain, les rochers de forme aléatoire et de la taille du mètre côtoient des graviers, de la boue et des argiles, ce qui représente une très forte dispersion de taille des particules, entre  $1 \text{ m}$  et moins d' $1 \mu\text{m}$  ( $\sim 10^6$  ordres de grandeurs!). À l'opposé, un milieu

constitué de gélules toutes identiques possède une dispersion de taille quasiment nulle. Pour la forme des particules, des grains de riz ou des pois chiches ne se comportent pas exactement de la même façon, par exemple. Dans cette étude, nous considérerons que les grains sont sphériques et monodisperses.

## 1.2 Transport de grains

Le transport des grains est une composante importante de l'étude des milieux granulaires. Il a son importance pour le remplissage d'un silo avec un tapis roulant, l'acheminement des poudres vers leur lieu d'utilisation dans une usine ou l'acheminement des fruits vers une machine de tri par exemple. De façon moins directe, on s'intéresse également au transport de grains pour dimensionner des barrages. Ces ouvrages sont des retenues d'eau le long d'une rivière, or la rivière transporte des sédiments qui s'accumulent au pied du barrage. Ces sédiments sont plus denses que l'eau et exercent donc une contrainte supplémentaire sur ces ouvrages. Ici, on s'intéresse à des écoulements cisailés au contact d'un lit de grains (et pas à des écoulements gravitaires ou dus à un gradient de pression). On distingue trois modes de locomotion pour les milieux granulaires (BAGNOLD (1956)), le charriage (roulement et glissement des grains en surface du lit de grains), la saltation (les grains transportés sautent et perdent le contact avec le lit de grains pendant une distance de quelques dizaines de diamètres de grains avant de retomber sur ce dernier) et la mise en suspension (les grains sont transportés par le fluide et dans le fluide sur de longues distances). Les forces hydrodynamiques sont de plus en plus importantes et la quantité de particules par unité de volume est de plus en plus faible lorsqu'on passe du charriage, à la saltation puis à la mise en suspension (figure 1.3). Dans cette étude on se limitera aux écoulements laminaires et donc au transport par charriage, voire par saltation.



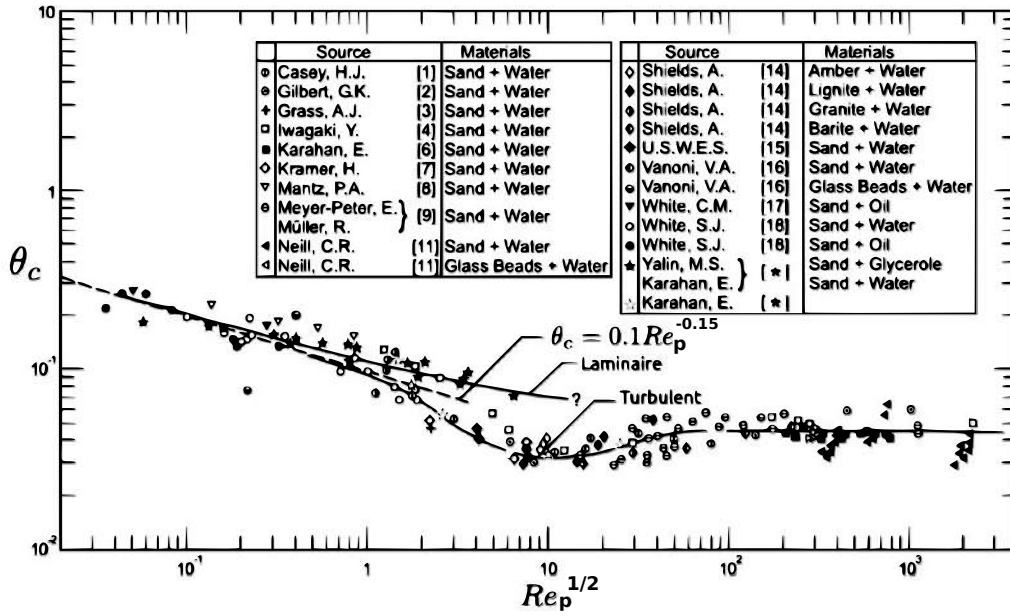
**FIGURE 1.3** – Schéma des modes de transport de grains (image tirée de BOUTELOUP (2017)).  
Charriage = Glissement et/ou Roulement.

Si les forces hydrodynamiques sont trop faibles, le lit de grains reste immobile, statique. Entre ce régime et le régime de charriage, il existe un seuil de mise en mouvement du lit de grains (SHIELDS (1936)). Ce seuil est généralement caractérisé par le nombre de Shields  $\theta$ . Ce nombre sans dimension est construit comme le rapport d'une force déstabilisante pour le lit de grains et d'une force stabilisante. Dans le cas d'un écoulement de cisaillement, on le définit comme la force due à la contrainte visqueuse appliquée sur un grain  $\eta_f \dot{\gamma} d^2$  et du poids apparent de ce grain  $(\rho_p - \rho_f)gd^3$ , on a donc :



$$\theta = \frac{\eta_f \dot{\gamma}}{(\rho_p - \rho_f)gd}, \quad (1.1)$$

où  $\eta_f$  est la viscosité dynamique du fluide porteur,  $\rho_f$  sa masse volumique et  $\dot{\gamma}$  est le taux de cisaillement dans le fluide au-dessus du lit de grains.  $g$  est l'accélération de pesanteur et  $d$  le diamètre des grains. Le seuil de mise en mouvement du lit de grains est alors caractérisé par une valeur critique du nombre de Shields, notée  $\theta_c$ . De nombreuses études expérimentales et théoriques ont été effectuées afin de déterminer la valeur de ce seuil en régime laminaire et turbulent. La figure 1.4 est une méta-analyse des valeurs du nombre de Shields critique  $\theta_c$  réalisée par YALIN et KARAHAN (1979). Ils mettent ainsi en évidence le fait que le seuil de mise en mouvement du lit de grains est une fonction du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p = \frac{\rho_f \dot{\gamma} d^2}{\eta_f}$ .



**FIGURE 1.4** – Nombre de Shields critique  $\theta_c$  en fonction du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ .  
Si  $\theta \geq \theta_c$ , alors le lit de grains est mis en mouvement par l'écoulement du fluide porteur.  
(graphe adapté de YALIN et KARAHAN (1979))

Dans le cadre de cette thèse, on se limitera au cas d'écoulements laminaires. Les nombres de Reynolds particulaire  $Re_p$  considérés seront compris entre 0.1 et 10 et donc les nombres de Shields critiques rencontrés ici seront environ compris entre 0.07 et 0.14. OURIEMI *et al.* (2007) obtiennent expérimentalement  $\theta_c = 0.12 \pm 0.03$  pour  $1.5 \times 10^{-5} \leq Re_p \leq 0.76$  ce qui est cohérent avec l'analyse de YALIN et KARAHAN (1979). On peut également remarquer que les mesures du seuil de mise en mouvement des grains  $\theta_c$  possèdent une forte dispersion.

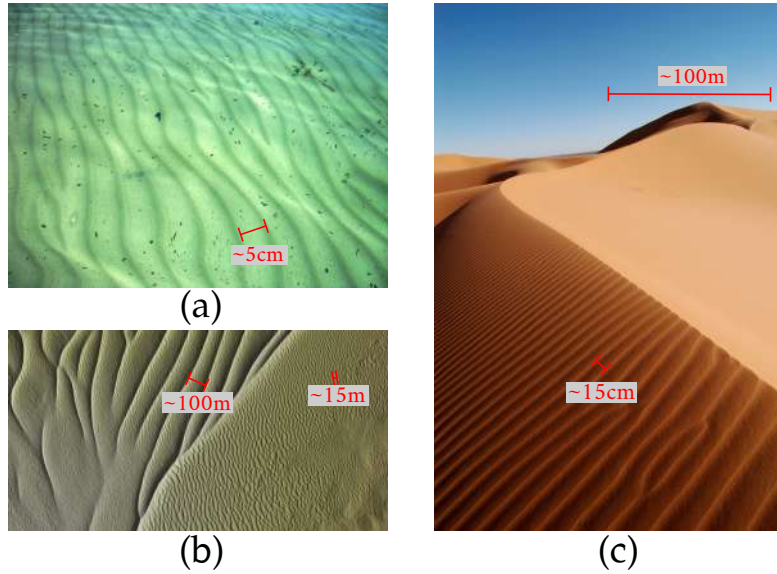
Au delà du seuil de mise en mouvement, on souhaite généralement connaître le débit de grains  $q_{sat}$  en régime stationnaire pour une situation donnée.  $q_{sat}$  s'exprime en  $m^2/s$  et correspond au volume de grains traversant une surface verticale par unité de temps et par unité de largeur du lit de grains. De nombreuses études expérimentales, numériques et théoriques ont tenté d'en trouver une expression. Un passage en revue relativement détaillé de ces études est disponible dans le manuscrit de thèse de BOUTELOUP (2017). On résume cette revue dans le tableau 1.1.

Auteurs	type d'analyse	$q_{sat}/V_s d$
MOUILLERON-ARNOULD (2002)	semi-analytique	$7.5(\theta - \theta_c)^3$
CHARRU <i>et al.</i> (2004)	expérimentale	$0.44\theta(\theta - \theta_c)$
MOUILLERON <i>et al.</i> (2009)	analytique	$\frac{3}{\eta_r \bar{\phi} \mu^2} \theta^3$
OURIEMI <i>et al.</i> (2009)	analytique	$\frac{3\bar{\phi}\theta_c}{2} \left( \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\theta}{\theta_c} \right)^3 + \frac{\theta}{\theta_c} \right] - \frac{1}{5} \right)$
KIDANEMARIAM et UHLMANN (2014a)	numérique	$29.9 \theta^{3.08}$

**TABLE 1.1** – Quelques corrélations du débit volumique de grains  $q_{sat}$ , adimensionné par le débit  $V_s d$ , où  $V_s = \frac{(\rho_p - \rho_f) g d^2}{18\eta_f}$  est la vitesse de Stokes.  $\bar{\phi}$  correspond à la fraction volumique de solide moyenne dans la couche mobile du lit de grains,  $\eta_r = \frac{\eta_{eq}^m}{\eta_f}$  est la viscosité apparente de la phase de mélange (normalisée par le viscosité du fluide) et  $\mu$  est le coefficient de friction entre grains.

On peut remarquer qu'en régime visqueux, plusieurs modèles obtiennent des débits granulaires (adimensionnés par  $V_s d$ ) qui varient comme  $\theta^3$  loin du seuil de mise en mouvement (i.e. si  $\theta \gg \theta_c$ ).

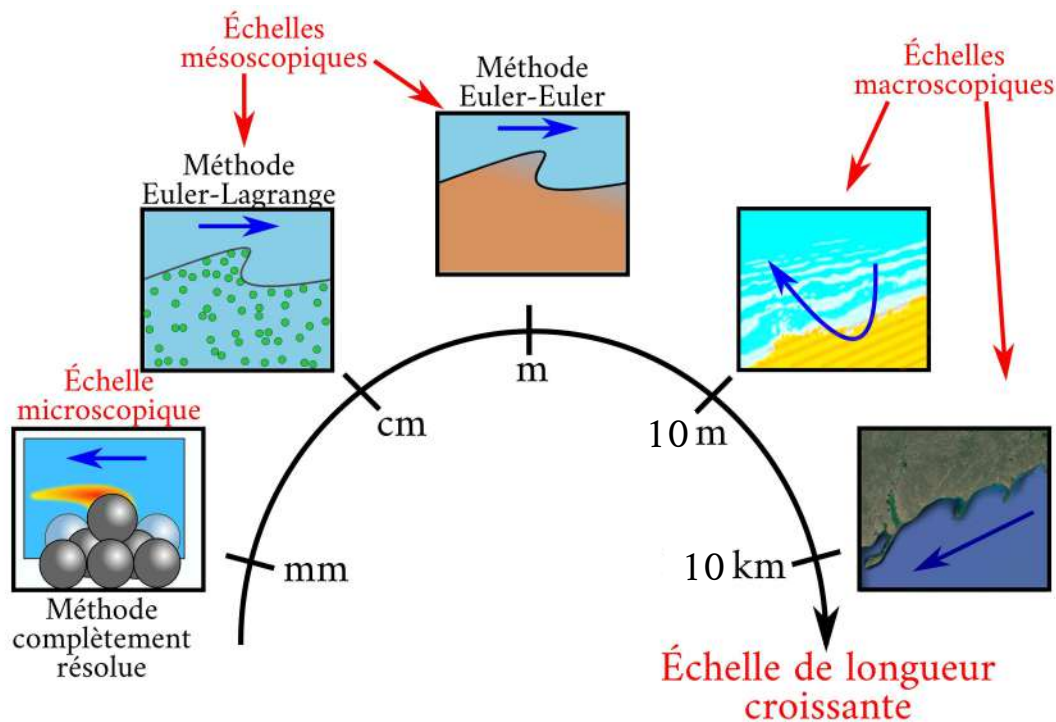
### 1.3 Échelles de description



**FIGURE 1.5** – Structuration des milieux granulaires sur plusieurs échelles de longueur. (a) : rides sur un plage; (b) : Ondulations des sédiments au large du port de Portrush, côte nord de l'Irlande (profondeur : 30-400 m), photo : Fabio Sacchetti, Marine Institute et INFOMAR. (c) : rides sur une dune dans l'Erg Chebbi (dunes de Merzouga), Maroc, photo : Flickr Rosino (2005). Dans tous ces cas, les grains ont au maximum une taille millimétrique.

Les lits de grains en écoulement sont sujets à des instabilités. Sous certaines conditions, la surface du lit de grains ne reste pas plane et des rides se forment (figure 1.5 (a) et (c)). Ces rides ont une

longueur d'onde  $\lambda_{ride}$  qui fait typiquement quelques centaines de diamètres de grains (et qui dépend de l'écoulement du fluide porteur). BOUTELOUP (2017) mesure un maximum du taux de croissance pour  $\lambda_{ride} \simeq 300d$  pour un nombre de Shields  $\theta = 0.4$ , un nombre de Reynolds particulaire  $Re_p = 7.35$  et un rapport de densité  $\rho_p/\rho_f = 2.5$ . Ces rides, lors de leur entraînement par l'écoulement, croissent et coalescent en conservant un rapport hauteur/longueur d'onde constant d'environ  $1/20$ . Des structures de bien plus grande taille, appelées dunes, peuvent aussi se former. Elles peuvent prendre des formes très variées : en étoile, perpendiculaires à l'écoulement, parallèles à l'écoulement ou solitaires et en forme de croissant (dunes barkhane). Elles se déplacent généralement dans le sens de l'écoulement mais il leur est aussi parfois possible de le remonter, il s'agit des anti-dunes (l'écoulement des grains va dans le sens de l'écoulement mais les anti-dunes le remonte). Sur Terre, des méga-dunes peuvent atteindre des tailles kilométriques pour une hauteur environ dix fois plus faible et pour des grains d'une taille millimétrique, voire inférieure. Ces structures possèdent donc une taille caractéristique de l'ordre de  $10^6 d$ . Afin de se rendre compte de la différence d'échelle de taille entre le grain et la dune, on peut aussi estimer le nombre de grains de sable dans la dune du Pilat : il est d'environ  $10^{19}$  (calcul dans l'annexe A)! Les rides et les dunes sont très grandes par rapport à la taille des grains, les dunes étant elles-mêmes très grandes par rapport à la taille des rides (figure 1.5 (c)). Ceci illustre le grand nombre d'échelles de taille mises en jeu lors des écoulements granulaires, de la taille des grains et des pores entre grains, à plusieurs millions de fois cette taille. On a alors recours à différentes descriptions pour décrire les milieux granulaires à des échelles différentes. La figure 1.6 illustre les différentes échelles de description possibles.



**FIGURE 1.6** – Schéma des différentes échelles de description (inspiré de D'ALBIGNAC (2012)).

Lorsqu'on s'intéresse à une faible quantité de particules ( $\sim 100$ ), on peut se permettre de résoudre numériquement la position et la vitesse de chacune d'entre elles ainsi que l'écoulement du fluide porteur autour de ces particules (figure 1.6). On utilise alors des méthodes de résolution de type DEM (Discret Element Method) pour les grains et on résout le fluide avec des méthodes telles que l'IBM (Immersed Boundary Method; IZARD (2014), UHLMANN (2005)) ou FCM (Force Coupling Me-

thod; CLIMENT et MAXEY (2009)) pour prendre en compte la présence des grains, par exemple. Dans ce cas, la taille caractéristique des cellules de calcul utilisées pour décrire l'écoulement est inférieure au diamètre des particules. La résolution de l'écoulement autour des grains coûte vite cher lorsqu'on augmente leur nombre. On utilise alors des modèles de type Euler-Lagrange dans lesquels on ne résout l'écoulement du fluide à une échelle plus grande que celle du grain mais on continue de suivre chaque grain individuellement ainsi que leurs contacts (BOUVELOUP (2017)). On a alors recours à des relations de fermeture pour estimer les interactions fluide-grains telles que la traînée et la portance. Si on veut encore augmenter la taille du domaine considéré, on ne peut plus se permettre de suivre individuellement toutes les particules. On utilise alors des modèles du type Euler-Euler dans lesquelles on considère que les grains se comportent comme une phase équivalente continue et on résout l'écoulement de chaque "phase" (JACKSON (2000)). La phase granulaire équivalente possède des propriétés rhéologiques particulières qu'il faut renseigner *a priori* au travers de relations de fermetures. Lorsqu'on augmente encore l'échelle de description, on doit encore simplifier les modèles de résolution et faire des hypothèses supplémentaires. On se limite alors souvent aux écoulements en eau peu profonde où l'on suppose que la pression est hydrostatique afin de pouvoir utiliser des modèles basés sur les équations de Barré de Saint-Venant. RAILLARD *et al.* (1994) ont montré l'efficacité de ce type d'approche pour décrire le transport de sédiments fins advectés en suspension dans le bassin de Marennes-Oléron. Ils ont alors recours à des modèles empiriques d'érosion et de déposition des sédiments.

On peut remarquer que plus l'échelle de description est grande, moins on possède d'informations sur les écoulements fluide et granulaire (on perd en précision) et plus on utilise des relations plus ou moins empiriques permettant de fermer le système d'équation considéré pour une échelle donnée.

## 1.4 Objectifs et plan de la thèse

L'objectif de ce travail de thèse est de partir d'un écoulement de Couette résolu, numériquement, à l'échelle des grains (échelle microscopique) et d'effectuer le changement d'échelle vers des échelles de description plus grandes (échelles mésoscopique et macroscopique) afin d'en extraire les comportements effectifs du système considéré à ces échelles. On souhaite alors, dans une certaine mesure, (re)trouver les relations de fermeture à utiliser pour cet écoulement lorsqu'on le décrit aux grandes échelles (mésoscopique et macroscopique).

Nous présentons, dans le chapitre 2, la méthode de résolution numérique utilisée pour résoudre un écoulement diphasique fluide-grains. Cette méthode est basée sur un couplage entre une méthode DEM et un solveur des équations de Navier-Stokes prenant en compte la présence des grains via une méthode IBM. On présente ensuite les performances de cette méthode de résolution sur des cas-tests simples. Dans le chapitre 3, on étudie l'évolution temporelle d'un lit de grains. On présente ensuite la convergence de la méthode de résolution avec la taille domaine et le raffinement du maillage ainsi que celle des statistiques temporelles effectuées. Dans le chapitre 4, on étudie l'influence du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  et du nombre de Shields  $\theta$  sur le comportement stationnaire d'un lit de grains soumis à un écoulement cisailé. Finalement, dans le chapitre 5, on effectue les changements d'échelles vers les échelles mésoscopique et macroscopique et on analyse l'influence de  $Re_p$  et  $\theta$  sur les résultats obtenus.

# Chapitre 2

## Méthodes et validations

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Mise en équation du problème . . . . .</b>	<b>12</b>
<b>2.2</b>	<b>Résolution numérique des équations des grains (GraDyM) . . . . .</b>	<b>13</b>
2.2.1	Modèle de contact . . . . .	13
2.2.2	Schéma d'avancement en temps . . . . .	16
2.2.3	Schéma récapitulatif de la méthode de résolution des grains . . . . .	17
<b>2.3</b>	<b>Résolution numérique de la phase fluide (JADIM) . . . . .</b>	<b>18</b>
2.3.1	La méthode de frontières immergées (IBM) . . . . .	18
2.3.1.1	Expression du forçage . . . . .	19
2.3.1.2	La fonction fraction volumique de solide $\alpha$ . . . . .	19
2.3.1.3	Interpolation de la vitesse à l'interface . . . . .	20
2.3.1.4	Calcul de l'interaction fluide-solide . . . . .	21
2.3.2	Procédure d'avancement temporel . . . . .	23
2.3.3	Schéma récapitulatif de la méthode de résolution de la phase fluide . . . . .	24
<b>2.4</b>	<b>Couplage JADIM/GraDyM . . . . .</b>	<b>25</b>
2.4.1	Schéma récapitulatif de la méthode de résolution dans son ensemble . . . . .	26
<b>2.5</b>	<b>Validation de la méthode . . . . .</b>	<b>26</b>
2.5.1	Rotation d'un cylindre dans un écoulement cisailé . . . . .	27
2.5.1.1	Sensibilité aux paramètres numériques : cas du cylindre fixe . . . . .	28
2.5.1.2	Cas du cylindre en rotation libre . . . . .	30
2.5.1.3	Vitesse de rotation en fonction du nombre de Reynolds . . . . .	31
2.5.2	Sédimentation d'une sphère . . . . .	32
2.5.3	Écoulement cisailé autour d'une sphère proche d'une paroi . . . . .	36
2.5.4	Écoulement dans un milieu poreux . . . . .	40

---

Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, dans le cadre de ce travail de thèse, nous avons besoin de résoudre des écoulements immergés fluide-grains à la plus petite échelle possible, celle des grains et des pores. Pour ce faire, on doit résoudre les équations de Navier-Stokes dans le fluide, les équations du mouvement de chaque grain, les interactions entre les grains et le fluide ainsi que les interactions entre grains. Dans ce chapitre, on présente les équations modélisant le problème abordé puis nous décrivons les méthodes mises en œuvre afin de résoudre numériquement ces équations ainsi que leur couplage. Et finalement, nous illustrons les performances de cette méthode sur des cas tests "académiques", ce qui nous permet également de déterminer les valeurs adéquates d'un certain nombre de paramètres numériques.

## 2.1 Mise en équation du problème

On souhaite résoudre l'écoulement d'un fluide newtonien et incompressible autour de grains solides en mouvement. Cet écoulement est régi, dans tout l'espace occupé par le fluide, par les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_f} \nabla P + \frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot [\eta_f (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)], \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{u}$ ,  $P$ ,  $\rho_f$  et  $\eta_f$  correspondent respectivement à la vitesse, la pression, la masse volumique et la viscosité dynamique du fluide et  $\mathbf{g}$  représente l'accélération de la pesanteur. L'équation (2.1) correspond à la loi de conservation de la quantité de mouvement du fluide et l'équation (2.2) à la loi de conservation de son volume (qui est équivalente à la conservation de la masse pour un fluide incompressible).

Pour les particules solides et sphériques, leur mouvement est régi par le principe fondamental de la dynamique. Dans le cadre de notre étude, il s'écrit pour le grain numéroté  $p$  :

$$\rho_p V_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \rho_p V_p \mathbf{g} + \mathbf{F}_h + \mathbf{f}_c, \quad (2.3)$$

$$I_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = \boldsymbol{\Gamma}_h + \boldsymbol{\Gamma}_c, \quad (2.4)$$

où  $V_p = \frac{\pi d^3}{6}$  est le volume de la particule  $p$  et  $\rho_p$  sa masse volumique,  $I_p = \frac{2}{5} \rho_p V_p (\frac{d}{2})^2$  son moment d'inertie et  $d$  son diamètre.  $\mathbf{f}_c$  représente la somme des forces de contact agissant sur cette particule et  $\boldsymbol{\Gamma}_c$  le couple résultant de ces forces.  $\mathbf{F}_h$  et  $\boldsymbol{\Gamma}_h$  représentent l'action du fluide sur le grain  $p$ . Elle est définie par les intégrales sur la surface du grain suivantes :

$$\mathbf{F}_h = \int_{S_p} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.5)$$

et

$$\boldsymbol{\Gamma}_h = \int_{S_p} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (2.6)$$

où

$$\boldsymbol{\sigma} = -P\mathbf{I} + \eta_f (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T), \quad (2.7)$$

correspond au tenseur des contraintes totales dans le fluide.  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface de la particule  $p$ ,  $S_p$  est la surface du grain  $p$  et  $\mathbf{r}$  la position relative au centre d'inertie de la particule

## 2.2 Résolution numérique des équations des grains (GraDyM)

### 2.2.1 Modèle de contact

Prenons deux particules sphériques indicées par  $i$  et  $j$  et notons  $\mathbf{x}_i$  le vecteur position du centre de masse de la particule  $i$ ,  $R_i$  son rayon,  $\mathbf{u}_i$  et  $\omega_i$  ses vitesses de translation et de rotation et enfin  $m_i$  sa masse. On a alors  $\delta_n = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| - R_i - R_j$  et on considère alors qu'un contact a lieu lorsque  $\delta_n \leq 0$ . Lors des contacts, on doit modéliser la répulsion qui a lieu entre ces deux particules afin qu'elles ne s'inter-pénètrent pas de façon significative. Plusieurs modèles de contact existent, le plus connu étant le modèle de HERTZ (1881) (JOHNSON et JOHNSON (1987)) mais il convient aussi de noter que BARAN *et al.* (2006) ont montré que tant que la raideur est suffisamment grande, la physique à grande échelle



n'est pas (ou peu) impactée. Cela revient à se placer dans la limite des sphères rigides. On notera que cette limite rigide assure également que le temps de contact est très courts devant les échelles associées au fluide (le pas de temps de résolution solide est donc plus faible que celui pour la phase fluide). De plus, on souhaite que les chocs ne soient pas élastiques mais qu'ils dissipent une partie de l'énergie cinétique des grains. La modélisation la plus simple prenant en compte ces propriétés, consiste à prendre une force de type ressort linéaire amorti (SHÄFER *et al.* (1996)). C'est effectivement le choix qui a été fait dans GraDyM pour modéliser la force de contact dans la direction normale. Pour la direction tangentielle, on prend en compte rappel élastique et un frottement de Coulomb au-dessus du seuil de glissement. On néglige l'amortissement dans la composante tangentielle des efforts de contact. Notons  $\mathbf{f}_{j \rightarrow i}$  la force exercée par la particule  $j$  sur la particule  $i$ , on peut alors la décomposer selon le vecteur normal parallèle aux centres des particules  $i$  et  $j$  ainsi qu'un vecteur tangent à celui-ci comme suit :

$$\mathbf{f}_{i \rightarrow j} = f_n \mathbf{n} + f_t \mathbf{t}, \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la particule  $i$  au niveau du point de contact de deux particules (donc  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|}$ ) et  $\mathbf{t}$  est le vecteur tangent au point de contact et appartenant au plan contenant les vecteurs vitesse de  $i$  et  $j$  (voir figure 2.1). Pour la force normale  $f_n$ , on a l'expression suivante :

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_n > 0, \\ \max(0, -k_n \delta_n - \gamma_n \frac{d\delta_n}{dt}) & \text{si } \delta_n \leq 0, \end{cases} \quad (2.9)$$

avec  $\frac{d\delta_n}{dt} = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}$ .  $k_n$  représente la raideur apparente des grains et  $\gamma_n$  un coefficient de dissipation. En pratique, on définit plutôt la durée d'un contact  $t_{col}$  et le coefficient de restitution normal  $e_n$  (en l'absence de fluide interstitiel), défini par la relation suivante :

$$e_n = -\frac{v_n^{fin \text{ contact}}}{v_n^{début \text{ contact}}} = -\frac{v_n(\delta_n = 0, t - t_0 = t_{col})}{v_n(\delta_n = 0, t - t_0 = 0)} \in [0, 1], \quad (2.10)$$

où  $t_0$  est l'instant du début du contact.  $e_n = 1$  correspond alors à un choc élastique. Il est ensuite possible de déduire la raideur et le coefficient de viscosité correspondant. En effet, les paramètres  $k_n$  et  $\gamma_n$  sont alors définis à partir des coefficients  $t_{col}$  et  $e_n$  par les relations suivantes :

$$k_n = \frac{m_{eff} \pi^2}{t_{col}^2} + \frac{\gamma_n^2}{4m_{eff}}, \quad (2.11)$$

et

$$\gamma_n = -\frac{2m_{eff}}{t_{col}} \ln(e_n), \quad (2.12)$$

où  $m_{eff} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$  est la masse réduite du système des deux particules en collision. L'utilisation d'un coefficient de restitution (indépendant de la vitesse d'impact) dans la modélisation des rebonds mène (en négligeant l'interaction avec le fluide environnant) à une suite des hauteurs de rebond qui décroît géométriquement. Dans ce cas là, il y a conversion totale de l'énergie cinétique et énergie potentielle de pesanteur et la seule dissipation d'énergie à lieu lors du choc. On obtient alors  $h_m/h_0 = e_n^{2m}$ ,  $h_m$  étant la hauteur du  $m^{eme}$  rebond. Le caractère géométrique de cette suite avait déjà été observé et décrit par Leonardo Da Vinci dans le cas d'une bille d'acier trempé dans de l'air (LECORNU (1908)), ce qui renforce le crédit que l'on peut attribuer à cette modélisation. Pour la composante tangentielle  $f_t$ , le modèle conduit à l'expression suivante :

$$f_t = -\min(|k_t \delta_t|, |\mu f_n|) \cdot \text{sign}(\delta_t), \quad (2.13)$$

où  $k_t$  est la raideur tangentielle,  $\mu$  le coefficient de friction entre les grains et  $\delta_t$  la pénétration tangentielle. La raideur tangentielle  $k_t$  est reliée empiriquement à la raideur normale par une relation



linéaire  $k_t = 0.2k_n$  (SHÄFER *et al.* (1996)). On peut remarquer que contrairement à la direction normale,  $\delta_t$  ne s'exprime pas simplement à l'aide des grandeurs physiques à disposition à l'instant  $t$ . Il est en fait nécessaire d'intégrer temporellement la relation  $\frac{d\delta_t}{dt} = (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{t}$ , ce qui est fait à l'aide d'un schéma d'Euler du premier ordre :

$$\delta_t(t + \Delta t_s) \simeq \delta_t(t) + \Delta t_s \cdot (\mathbf{v}_j(t) - \mathbf{v}_i(t)) \cdot \mathbf{t}, \quad (2.14)$$

où  $\Delta t_s$  est le pas de temps utilisé dans GraDyM. Finalement, le couple exercé par la particule  $j$  sur la particule  $i$ , calculé au centre de la particule  $i$ , s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{\Gamma}_{j \rightarrow i} = R_i \mathbf{n} \times f_t \mathbf{t}. \quad (2.15)$$

Le système d'équations pour les grains est maintenant fermé (en supposant toujours que les interactions avec le fluide  $\mathbf{F}_h$  et  $\mathbf{\Gamma}_h$  sont connues). Dans le logiciel GraDyM, un traitement particulier a été fait pour détecter les contacts possibles entre grains de façon efficace. A priori, la détection des contacts demanderait de calculer  $\frac{N_p(N_p-1)}{2} \sim \frac{N_p^2}{2}$  distances inter-grains, pour  $N_p$  particules. Cela représente très vite un temps de calcul non négligeable. Afin d'être en mesure d'effectuer des simulations d'un nombre important de grains, IZARD (2011) a optimisé la détection des contacts en implémentant l'utilisation de tables de Verlet (FANG *et al.* (2007)) référençant les contacts et les efforts associés. L'idée est de découper le domaine en sous-domaines de taille raisonnable, contenant quelques grains chacun, et de ne chercher les contacts possibles d'une particule avec d'autres uniquement à l'intérieur du sous domaine contenant cette particule ou dans les sous-domaines voisins. Cela fait passer le problème de la détection des contacts d'une complexité en  $\mathcal{O}(N_p^2)$  à  $\mathcal{O}(N_p \log(N_p))$ . De plus, ces tables ne sont pas mises à jours à chaque pas de temps mais sur une échelle de temps représentative d'un déplacement des grains d'une fraction de leur diamètre, notée  $N_v$  pas de temps. Cela permet de réduire le coup de calcul sans pour autant risquer de manquer des contacts. Et finalement, elles permettent également un abaissement des besoins en mémoire vive permettant des simulations jusqu'à quelques centaines de milliers de grains sur un processeur. Dans le cas présent, où nous ne dépasserons pas le millier de particules, un seul CPU sera utilisé pour la résolution de la phase granulaire.

## 2.2.2 Schéma d'avancement en temps

Le schéma d'avancement temporel initialement codé par IZARD (2014) était un schéma explicite d'Euler d'ordre 1. Il nécessitait un faible pas de temps ( $\Delta t_s \sim \frac{t_{col}}{100}$ ). C'est pourquoi un schéma de type prédictor-correcteur d'ordre 4 a été implémenté par BOUTELOUP (2017) : le schéma de Gear (DA CRUZ *et al.* (2005), PÖSCHEL et SCHWAGER (2005)). Ce schéma permet de relâcher la contrainte sur le pas de temps tout en gardant une précision équivalente (KRUGGEL-EMDEN *et al.* (2008)). De plus, il ne nécessite de détecter les contacts et de calculer les forces associées qu'une seule fois par pas de temps contrairement à un schéma de type Runge-Kutta.

La résolution temporelle est alors effectuée en deux fois : une étape de prédiction puis une autre de correction. On prédit les dérivées (d'ordre 0 à 3) de la position des particules à l'aide des valeurs au pas de temps précédent et de leur développement de Taylor. Cela donne, pour la particule indicée  $p$ , en notant avec une  $*$  les quantités prédites :

$$\begin{aligned}\frac{d^3 \mathbf{r}_p^*}{dt^3}(t + \Delta t_s) &= \frac{d^3 \mathbf{r}_p}{dt^3}(t), \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_p^*}{dt^2}(t + \Delta t_s) &= \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2}(t) + \Delta t_s \frac{d^3 \mathbf{r}_p}{dt^3}(t), \\ \frac{d \mathbf{r}_p^*}{dt}(t + \Delta t_s) &= \frac{d \mathbf{r}_p}{dt}(t) + \Delta t_s \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2}(t) + \frac{\Delta t_s^2}{2} \frac{d^3 \mathbf{r}_p}{dt^3}(t), \\ \mathbf{r}_p^*(t + \Delta t_s) &= \mathbf{r}_p(t) + \Delta t_s \frac{d \mathbf{r}_p}{dt}(t) + \frac{\Delta t_s^2}{2} \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2}(t) + \frac{\Delta t_s^3}{6} \frac{d^3 \mathbf{r}_p}{dt^3}(t).\end{aligned}\tag{2.16}$$

Ces grandeurs sont ensuite utilisées pour en déduire les valeurs des forces de contacts. Et alors, le principe fondamentale de la dynamique appliqué à la particule  $p$  nous donne accès à la valeur corrigée de la dérivée seconde de la position du grain  $p$  :

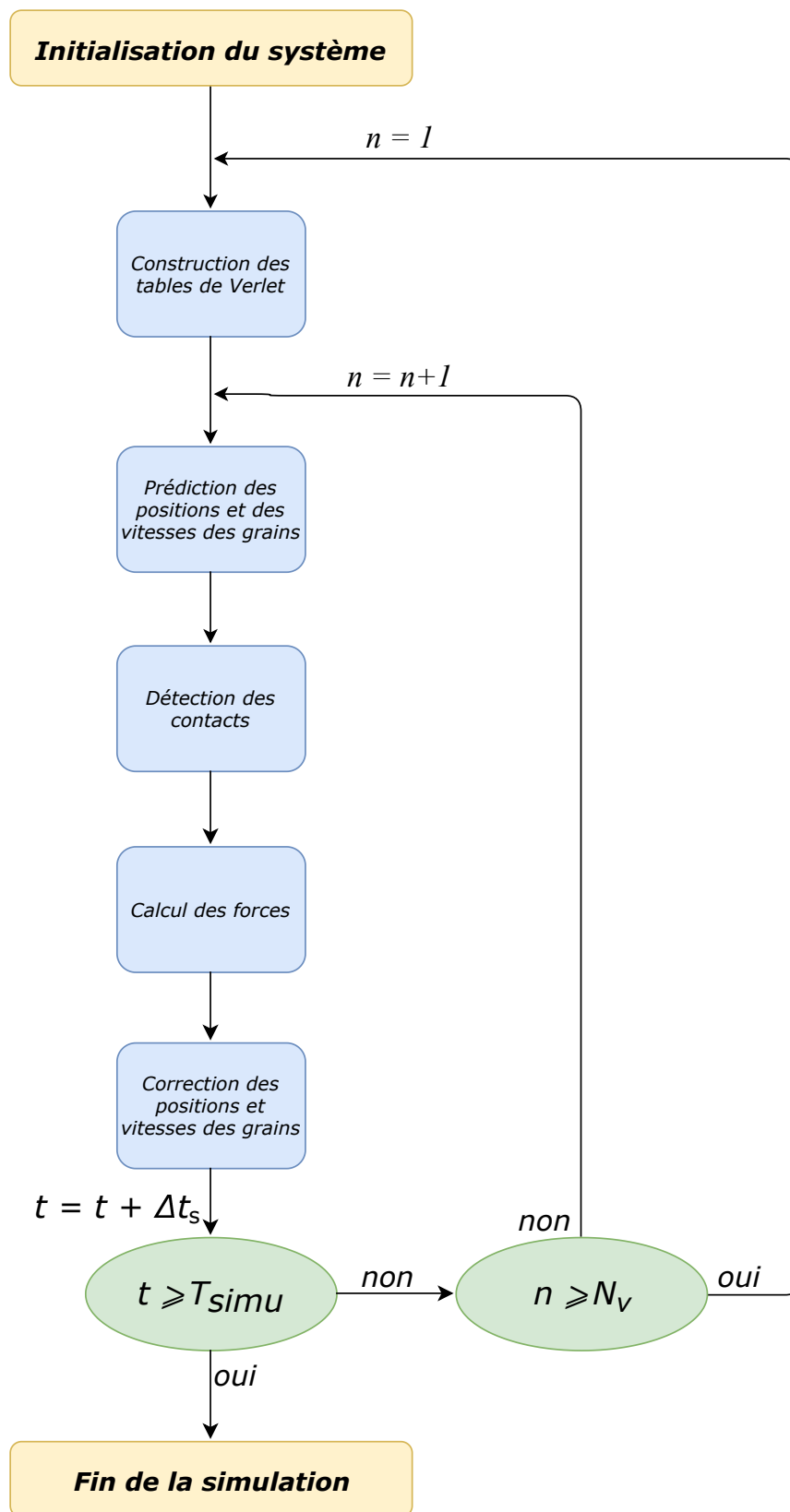
$$\frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2}(t + \Delta t_s) = \frac{1}{\rho_p V_p} \left( \sum_{j \neq p} \mathbf{f}_{j \rightarrow p} + \mathbf{F}_h + \rho_p V_p \mathbf{g} \right),\tag{2.17}$$

La correction sur l'accélération vaut donc  $\Delta a = \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2}(t + \Delta t_s) - \frac{d^2 \mathbf{r}_p^*}{dt^2}(t + \Delta t_s)$ . On corrige enfin les valeurs prédites des autres dérivées de  $\mathbf{r}_p$  au pas de temps  $t + \Delta t_s$  à l'aide de la correction sur l'accélération  $\Delta a$  comme il suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_p(t + \Delta t_s) &= \mathbf{r}_p^*(t + \Delta t_s) + c_0 \frac{\Delta t_s^2}{2} \Delta a, \\ \frac{d \mathbf{r}_p}{dt}(t + \Delta t_s) &= \frac{d \mathbf{r}_p^*}{dt}(t + \Delta t_s) + c_1 \frac{\Delta t_s}{2} \Delta a, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2}(t + \Delta t_s) &= \frac{d^2 \mathbf{r}_p^*}{dt^2}(t + \Delta t_s) + c_2 \frac{3}{\Delta t_s} \Delta a,\end{aligned}\tag{2.18}$$

avec  $c_0 = \frac{1}{6}$ ,  $c_1 = \frac{5}{6}$  et  $c_2 = \frac{1}{3}$  (PÖSCHEL et SCHWAGER (2005)). Cette procédure d'avancement temporel est schématisé sur la figure 2.2.

### 2.2.3 Schéma récapitulatif de la méthode de résolution des grains



**FIGURE 2.2** – Représentation schématique de l'algorithme de résolution de GraDyM (BOUVELOUP (2017)).  $T_{simu}$  représente le temps physique que l'on souhaite atteindre à la fin de la simulation.

## 2.3 Résolution numérique de la phase fluide (JADIM)

Dans cette section, on va décrire la méthode de résolution de la phase fluide. On doit résoudre les équations de Navier-Stokes incompressibles, (2.1) et (2.2), partout dans le fluide. On considère les positions et vitesses des particules solides comme connues. Nous y reviendrons dans la section 2.4 abordant le couplage de GraDyM et JADIM, mais on a déjà vu dans la section précédente 2.2.2 que ces grandeurs étaient calculées par le solveur granulaire. Pour cela, on utilise le code JADIM développé à L'IMFT (Institut de mécanique des fluides de Toulouse, Toulouse, France) depuis bientôt 30 ans. Cet outil numérique résout les équations instationnaires 3D de Navier-Stokes en incompressibles sur des maillages structurés curvilignes orthogonaux. Le code est basé sur une approche de type volumes finis sur maillages décalés utilisant une méthode de projection pour imposer l'incompressibilité (CALMET (1995)). La méthode est du second ordre en espace et en temps grâce à l'utilisation d'un schéma de Runge-Kutta en trois pas pour la résolution des termes advectifs et des termes sources, associée à un schéma de Crank-Nicolson pour la partie visqueuse.

L'approche actuelle permet de calculer une grande variété d'écoulements monophasiques et multiphasiques (voir par exemple la description du logiciel sur <https://www.imft.fr/JADIM>). En particulier, il permet la prise en compte d'obstacles de formes quelconques et des interactions fluide-solide par une méthode de frontières immergées (IBM, Immersed Boundary Method), ainsi un maillage cartésien peut être utilisé.

Le code JADIM est parallélisé avec une parallélisation basée sur la décomposition de domaine à l'aide d'une bibliothèque d'interface de passage de messages (MPI) et le système linéaire de Poisson permettant de calculer le champ de pression est résolu avec un solveur itératif de la bibliothèque PETSc. À l'heure actuelle, le code JADIM a déjà été exécuté sur 12 000 CPU pour un maillage possédant plus d'un milliard de nœuds.

Ici, nous utilisons le module IBM. En effet, comme on l'a vu dans la section précédente, on a besoin d'accéder aux interactions fluide-grain. De plus, on se placera toujours sur des maillages cartésiens réguliers par la suite (avec  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ). Dans la suite de cette section, on présente la méthode de frontières immergées utilisée dans le code JADIM, puis on détaille le schéma numérique utilisé dans JADIM.

### 2.3.1 La méthode de frontières immergées (IBM)

La méthode de frontières immergées fait référence à l'approche initialement développée par PESKIN (1972) pour simuler des interactions fluide-structure dans le cœur, mais cela fonctionne de la même manière pour n'importe quel objet solide, mobile ou non, déformable ou non, immergé dans un fluide. L'idée est de décrire le fluide sur un maillage Eulérien et le solide de manière Lagrangienne. Les équations de Navier-Stokes sont alors résolues dans tout l'espace (fluide et solide), mais en ajoutant un terme de forçage afin d'imposer l'écoulement dans les zones occupées par le solide. On obtient ainsi un écoulement qui vérifie les conditions limites fluide-solide à la frontière de chaque objet. On résout donc le système d'équation suivant (MOHD-YUSOF (1997)) :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_f} \nabla P + \frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot [\eta_f (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{f}_{IBM}, \quad (2.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.20)$$

Le terme  $\mathbf{f}_{IBM}$  correspond au terme de forçage du fluide. Il s'agit d'un forçage discret selon la classification proposée par MITTAL et IACCARINO (2005), plus adapté à la simulation d'objets indéformables que le forçage continu qu'avait proposé PESKIN (1972) et qui était, lui, plus adapté à la simulation

d'écoulements autour d'objets déformables.

Comme mentionné précédemment, les objets solides sont décrits de façon lagrangienne alors que le fluide l'est de façon eulérienne. Les contours de l'objet ne coïncident donc pas avec les nœuds du maillage. Le choix est généralement fait d'avoir recours à des interpolations (ou extrapolations) de la vitesse afin d'imposer la condition limite de non-glissement au niveau de l'objet. Ces solutions sont souvent simples à implémenter mais mènent à des oscillations importantes du forçage hydrodynamique dans le cas de simulations d'objets mobiles (UHLMANN (2003), LEE et KIM (2011), SEO et MITTAL (2011)). Dans JADIM, le choix a été fait d'utiliser l'approche de YUKI *et al.* (2007), il s'agit d'une approche volumique pour laquelle la force est déterminée en imposant que la vitesse en tout point de la particule sur le maillage fluide est la vitesse locale de la particule. L'idée est d'utiliser une fonction fraction volumique solide  $\alpha(\mathbf{x})$  définie sur tout le maillage. Cette fonction prend la valeur 0 dans les cellules occupées par du fluide, 1 dans les cellules occupées par du solide et des valeurs intermédiaires dans la région interfaciale. Le forçage est ensuite exprimé à l'aide de cette fonction  $\alpha$ . Cette méthode permet d'amoindrir les oscillations du forçage dans le cas de particules mobiles, et ceux d'autant plus que la transition entre solide et fluide est douce et donc que l'interface est étalée. Une revue détaillée des différents forçages existant est disponible dans le manuscrit de thèse de PIERSON (2015).

### 2.3.1.1 Expression du forçage

Le terme de forçage  $\mathbf{f}_{IBM}$  prend la forme suivante :

$$\mathbf{f}_{IBM} = \alpha(\mathbf{x}) \frac{\mathbf{u}_D - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t_f}, \quad (2.21)$$

où  $\mathbf{u}_D$  correspond à la vitesse désirée et représente en règle générale la vitesse du solide au point considéré (donc  $\mathbf{u}_D \sim \mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}$  pour une particule sphérique),  $\Delta t_f$  est le pas de temps du schéma numérique de résolution de la phase fluide et  $\tilde{\mathbf{u}}$  est la dernière mise à jour disponible de vitesse du fluide. Les expressions de  $\mathbf{u}_D$  et  $\tilde{\mathbf{u}}$  seront respectivement détaillées dans les sections 2.3.1.3 et 2.3.2. On peut noter que faire diminuer le pas de temps  $\Delta t_f$  augmente la valeur du forçage et que la limite  $\Delta t_f \rightarrow 0$  reviendrait à utiliser une méthode de pénalisation (LUO *et al.* (2009)). Avec une telle expression du forçage, on a  $\mathbf{f}_{IBM} = 0$  dans le fluide et on y résout donc bien les équations de Navier-Stokes dans ce cas. Pour les nœuds du maillage à l'intérieur d'un solide (défini par  $\alpha > 0.5$ ), on applique une force qui est proportionnelle à l'écart entre la vitesse du fluide et la vitesse locale de la particule. Et pour les cellules interfaciales ( $0 < \alpha < 0.5$ ), le forçage est appliqué progressivement. Différents cas test de cette méthode ont été traités et sont disponibles dans l'article de BIGOT *et al.* (2014) (configuration sans contact entre objets).

Afin d'augmenter l'effet du forçage, PIERSON (2015) a implémenté une sous-boucle sur l'étape de forçage comme KEMPE et FRÖHLICH (2012), qui passe  $N_L$  fois par pas de temps afin d'imposer plus précisément la condition limite. Donc pour  $N_L = 1$ , le forçage est appliqué de la même façon que précédemment ; pour  $N_L = 2$ , l'étape de forçage est effectuée deux fois, et ainsi de suite. Ce point est explicité à l'aide du schéma numérique de JADIM (figure 2.5) et est également représenté sur le schéma récapitulatif de l'avancement en temps du couplage de JADIM et GraDyM (figure 2.6).

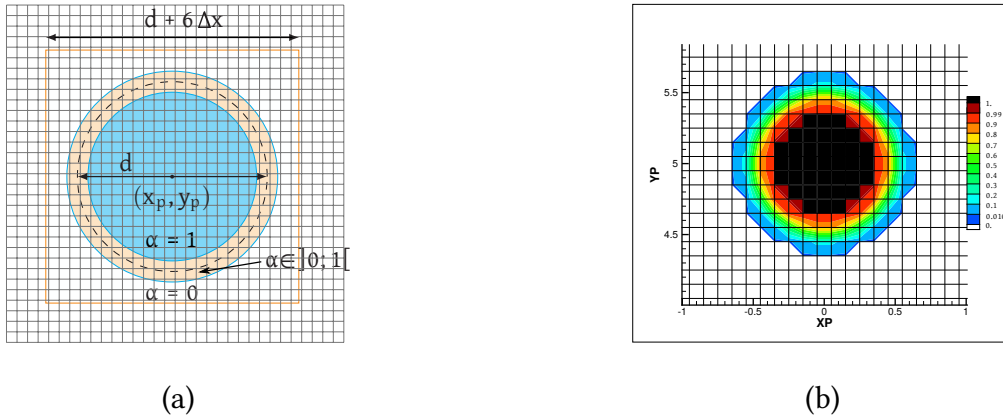
### 2.3.1.2 La fonction fraction volumique de solide $\alpha$

La fonction fraction volumique de solide est ici calculée dans une boîte cubique entourant chaque grains sphériques. Cette boîte possède des cotés de longueur  $d + 6\Delta x$  (voir la figure 2.3(a)). Il suffit de sommer les fractions volumiques de solide de chaque particule (définies uniquement dans leur boîte) pour obtenir la fonction  $\alpha$  intervenant dans l'expression du forçage qui est définie sur tout le

domaine de calcul. Rappelons que cette fonction vaut 1 dans les mailles solides, 0 dans celles fluides et des valeurs intermédiaires proches de l'interface. S'il est naturel de choisir une fonction radiale pour décrire des particules sphériques, le choix du profil de cette fonction n'est pas anodin. On a vu que si elle est trop abrupte, des oscillations parasites pouvaient apparaître mais si elle est trop étalée cela va se ressentir sur la précision de la description de l'écoulement proche des parois solides (résolution de la couche limite). On choisit d'utiliser une fonction sinusoïdale dans la zone interfaciale (NAKAYAMA et YAMAMOTO (2005)) à la place de la tangente hyperbolique qu'avait initialement proposé YUKI *et al.* (2007). Si on note  $2\Delta$  l'épaisseur de la zone interfaciale, la forme sinusoïdale a l'avantage de prendre les valeurs 0 et 1 en  $d/2 \pm \Delta$  contrairement à la tangente hyperbolique. Ainsi l'épaisseur de la zone interfaciale, où  $\alpha \in ]0, 1[$ , est mieux définie avec la forme sinusoïdale et mesure exactement  $2\Delta$ . L'expression de la fraction volumique de solide retenue, pour la particule  $p$ , de rayon  $d/2$  et dont le centre est positionné en  $\mathbf{x}_p$  est :

$$\alpha(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\mathbf{r}| > d/2 + \Delta, \\ \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{\pi(d/2 - |\mathbf{r}|)}{2\Delta} \right) + 1 \right] & \text{si } d/2 - \Delta \leq |\mathbf{r}| \leq d/2 + \Delta, \\ 1 & \text{si } |\mathbf{r}| < d/2 - \Delta, \end{cases} \quad (2.22)$$

où  $|\mathbf{r}| = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|$  et  $\Delta$  prend typiquement des valeurs entre  $\Delta x$  et  $3\Delta x$ . Ce choix n'est pas arbitraire car il contrôle l'amplitude des oscillations du forçage et la bonne description de la couche limite. Ce point sera discuté dans la section 2.5. Les figures 2.3 (a) et (b) montrent la fraction volumique d'un grain donné de façon schématisée et ce à quoi cela correspond concrètement sur un maillage donné (ici,  $\frac{d}{\Delta x} = 10$ ).



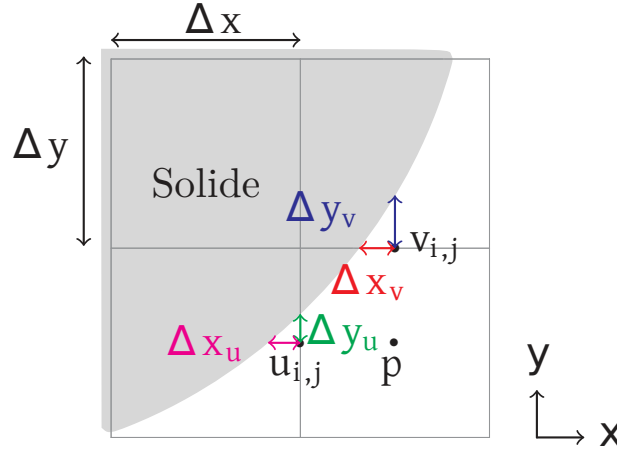
**FIGURE 2.3** – (a) : Schéma représentant la boîte sur laquelle  $\alpha$  est calculée (PIERSON (2015)).  
(b) : Représentation réelle de  $\alpha$  dans le cas où  $d/\Delta x = 10$ .

On peut alors estimer l'erreur commise sur le volume des particules. Il suffit de comparer le volume théorique de la particule  $V_p = \frac{4}{3}\pi(\frac{d}{2})^3$  avec le volume mesuré à l'aide de la fonction  $\alpha$  :  $V_\alpha = \int_V \alpha dv^3$ , où  $V$  est le volume de la boîte entourant le grain. On peut alors montrer que l'erreur est d'ordre 2 vis-à-vis du rapport  $\frac{\Delta x}{d}$ , que ce soit pour la forme sinusoïdale ou la forme en tangente hyperbolique (PIERSON (2015)). L'erreur n'est toutefois pas négligeable pour des grandes valeurs de  $\frac{\Delta x}{d}$ , de l'ordre de 5% pour 10 mailles par diamètre (*i.e.*  $\frac{d}{\Delta x} = 10$ ).

### 2.3.1.3 Interpolation de la vitesse à l'interface

On a vu que le forçage permettait de faire tendre la vitesse fluide  $\tilde{\mathbf{u}}$  vers la vitesse désirée notée  $\mathbf{u}_D$ , que l'on a assimilé à la vitesse du grain pour le moment. En fait, la vitesse désirée n'est pas tout à fait égale à la vitesse qu'aurait la particule au nœud considéré. Si on faisait cela, comme

l'interface est étalée de part et d'autre du rayon théorique de la particule, on modifierait la vitesse fluide à l'extérieur de la particule, et ce d'autant plus fortement que le pas de temps est petit. LUO *et al.* (2009) et PIERSON (2015) montrent que cela mène à des problèmes de consistance en temps (*i.e.* diminuer le pas de temps ne fait pas forcément diminuer l'erreur et peut même parfois la faire augmenter!). C'est en partant de cette constatation que ce dernier a implémenté une modification de la vitesse désirée à l'extérieur de la particule. Pour l'intérieur, le forçage ne pose pas de problème et n'est donc pas modifié. Pour l'extérieur, l'idée est d'imposer une vitesse "plus proche" de la vitesse du fluide que de la vitesse du solide. Une interpolation linéaire multidirectionnelle est utilisée à cet effet. Cette méthode a été proposée par IKENO et KAJISHIMA (2007) et se base sur le développement de Taylor dans les trois directions de la vitesse. Un exemple en 2D est donnée ci-après (équations (2.23) et (2.24)),  $\mathbf{u}_I$  étant la vitesse interpolée, les autres notations sont données par la figure 2.4.



**FIGURE 2.4** – Représentation schématisée d'une cellule de calcul à l'extérieur du grain pour laquelle  $\alpha \neq 0$ . Les notations des distances sont mises en évidence pour faire le lien avec le schéma d'interpolation 2D (équations (2.23) et (2.24)).

$$u_{Ii,j} = \frac{1}{2} \frac{u_{i,j-1} \Delta y_u + u_p \Delta y}{\Delta y + \Delta y_u} + \frac{1}{2} \frac{u_{i+1,j} \Delta x_u + u_p \Delta x}{\Delta x + \Delta x_u}, \quad (2.23)$$

$$v_{Ii,j} = \frac{1}{2} \frac{v_{i,j-1} \Delta y_v + v_p \Delta y}{\Delta y + \Delta y_v} + \frac{1}{2} \frac{v_{i+1,j} \Delta x_v + v_p \Delta x}{\Delta x + \Delta x_v}. \quad (2.24)$$

Finalement, la vitesse désirée  $\mathbf{u}_D$  prend la forme suivante :

$$\mathbf{u}_D = \begin{cases} \alpha(\mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + (1 - \alpha)\mathbf{u}_I & \text{si } \|\mathbf{r}\| > d/2, \\ (\mathbf{u}_p + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) & \text{si } \|\mathbf{r}\| \leq d/2. \end{cases} \quad (2.25)$$

#### 2.3.1.4 Calcul de l'interaction fluide-solide

Pour calculer l'interaction fluide-grain, comme définie par l'équation (2.5), il faudrait calculer l'intégrale de  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  (et celle de  $\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ ) sur la surface des grains, où  $\boldsymbol{\sigma}$  est défini par l'équation (2.7). Mais le calcul de ces intégrales de surface n'est pas adapté à la méthode choisie à cause de l'étalement des interfaces fluide-solide. UHLMANN (2005) propose de contourner ce problème en intégrant l'équation (2.19) sur le volume fluide  $V_p$  dont les contours coïncident avec la particule considérée. On obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_p} \rho_f \mathbf{u} dv = \int_{S_p} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS + \rho_f V_p \mathbf{g} + \int_{V_p} \rho_f \mathbf{f}_{IBM} dv. \quad (2.26)$$

De même, on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \int_{V_p} \rho_f \mathbf{r} \times \mathbf{u} \, dv = \int_{S_p} \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \, dS + \int_{V_p} \rho_f \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{IBM} \, dv. \quad (2.27)$$

En utilisant les équations (2.26) et (2.27) pour éliminer les intégrales surfaciques dans les équations (2.5) et (2.6), nous obtenons une expression de la force et du couple induit par le fluide sur le grain :

$$\mathbf{F}_h = \frac{d}{dt} \int_{V_p} \rho_f \mathbf{u} \, dv - \rho_f V_p \mathbf{g} - \int_{V_p} \rho_f \mathbf{f}_{IBM} \, dv, \quad (2.28)$$

$$\mathbf{\Gamma}_h = \frac{d}{dt} \int_{V_p} \rho_f \mathbf{r} \times \mathbf{u} \, dv - \int_{V_p} \rho_f \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{IBM} \, dv. \quad (2.29)$$

Le calcul de ces intégrales volumiques ne pose pas de problème particulier. Il suffit d'intégrer ces quantités sur tout le volume de la boîte entourant le grain en les multipliant par la fraction volumique de solide  $\alpha$ . L'emploi de cette méthode permet donc bien de récupérer les interactions solide-fluide que l'on avait considéré comme connues lors de la description de la méthode de résolution de la phase granulaire (section 2.2).



### 2.3.2 Procédure d'avancement temporel

On décrit ici la méthode d'avancement temporelle utilisée pour la résolution de la phase fluide. Le schéma numérique utilisé est le suivant :

1. Au début du pas de temps, on connaît le champ de vitesse à divergence nulle  $\mathbf{u}^n$  et le champ de pression  $P^{n-1/2}$  ainsi que les positions  $\mathbf{r}_p^n$  et les vitesses  $\mathbf{u}_p^n$  et  $\boldsymbol{\omega}_p^n$  des particules ;
2. Boucle du schéma de Runge-Kutta/Crank-Nicolson (pour  $k \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$ ) :

- (a) calcul de la vitesse intermédiaire  $\tilde{\mathbf{u}}^k$  sans prendre en compte la présence des objets solides :

$$\tilde{\mathbf{u}}^{k,1} = \hat{\mathbf{u}}^{k-1} + \Delta t_f \mathcal{SM}, \quad (2.30)$$

avec

$$\mathcal{SM} = \gamma_k \mathbf{N}(\hat{\mathbf{u}}^{k-1}) + \zeta_k \mathbf{N}(\hat{\mathbf{u}}^{k-2}) + (\alpha_k + \beta_k) \left( \mathbf{L}(\hat{\mathbf{u}}^{k-1}) - \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_f} \nabla P^{n-1/2} \right), \quad (2.31)$$

où  $\mathbf{L}$  et  $\mathbf{N}$  désignent respectivement les termes linéaire et non-linéaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (équation (2.19)). Leurs expressions sont disponibles dans le manuscrit de thèse de CALMET (1995). Et où  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  et  $\gamma_k$  sont les coefficients associés à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 3 utilisée ici.

- (b) modification du champ de vitesse fluide afin de prendre en compte le terme de forçage  $\mathbf{f}_{IBM}$ , pour  $s \in \llbracket 1, N_L \rrbracket$  (sous-boucle de forçage) :

$$\mathbf{f}_{IBM}^{k,s} = \mathbf{f}_{IBM}^{k,s-1} + \alpha \frac{\mathbf{u}_D^{k,s}(\mathbf{u}_p^{k-1}, \boldsymbol{\omega}_p^{k-1}, \tilde{\mathbf{u}}^{k,s}) - \tilde{\mathbf{u}}^{k,s}}{\Delta t_f}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}}^{k,s} - \hat{\mathbf{u}}^{k-1}}{\Delta t_f} - \beta_k \frac{\eta_f}{\rho_f} \mathbf{L}(\tilde{\mathbf{u}}^{k,s} - \hat{\mathbf{u}}^{k-1}) = \mathcal{SM} + \mathbf{f}_{IBM}^{k,s-1}, \quad (2.33)$$

où  $N_L$  est le nombre de passages par la sous-boucle de forçage (ici,  $N_L = 2$ ).

3. Pour  $k = 3$ , on obtient  $\hat{\mathbf{u}}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{k,N_L}$ .
4. On résout une pseudo équation de Poisson afin d'obtenir le potentiel auxiliaire  $\phi^{n+1}$  pour obtenir le champ de vitesse à divergence nulle  $\mathbf{u}^{n+1}$  et le champ de pression  $P^{n+1/2}$  :

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho_f} \nabla \phi^{n+1} \right) = \frac{1}{\Delta t_f} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}^{n+1}. \quad (2.34)$$

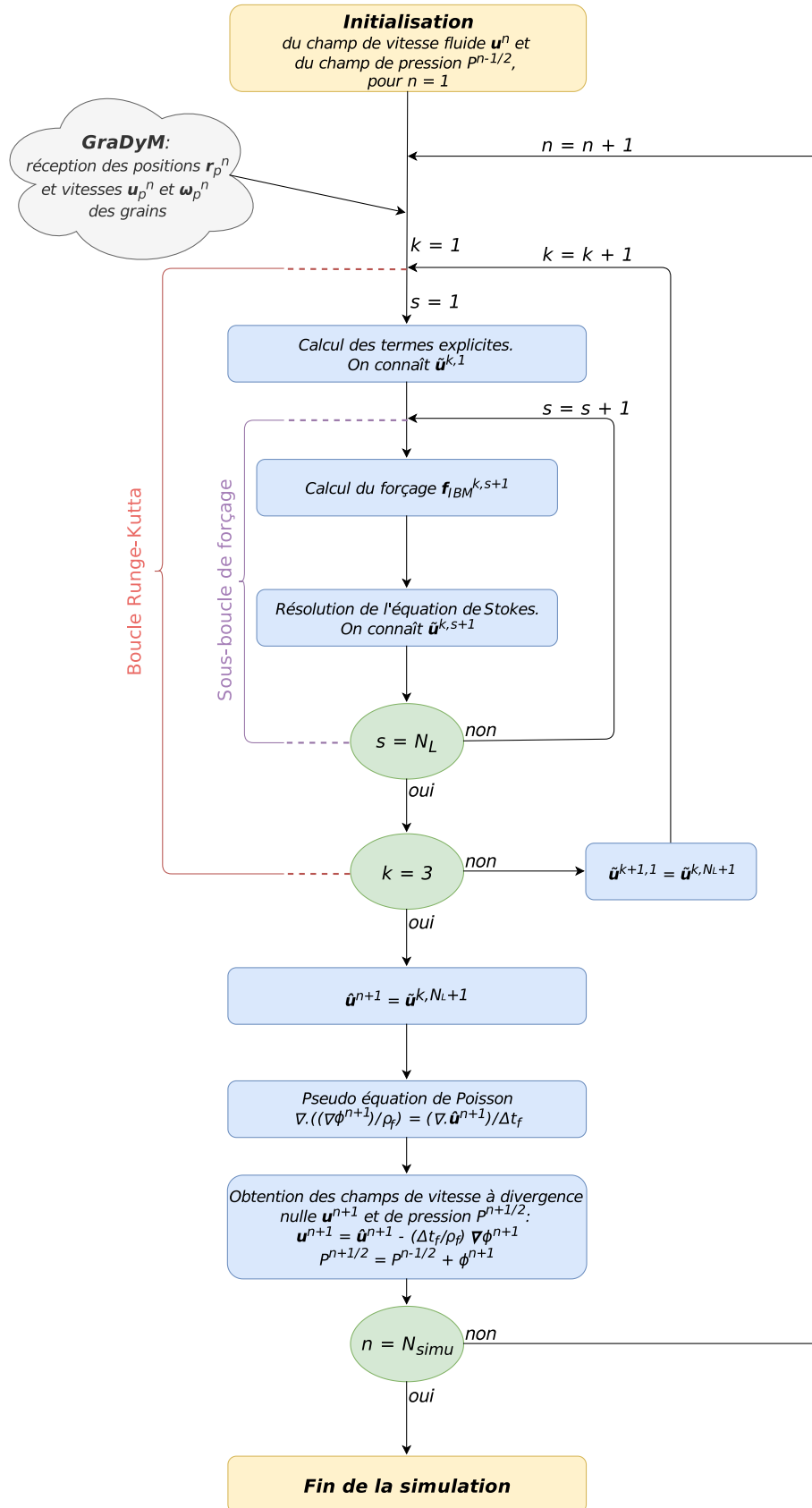
5. On obtient finalement le champ de vitesse à divergence nulle  $\mathbf{u}^{n+1}$  et le champ de pression  $P^{n+1/2}$  à l'aide du potentiel  $\phi^{n+1}$  :

$$P^{n+1/2} = P^{n-1/2} + \phi^{n+1}, \quad (2.35)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{n+1} - \frac{\Delta t_f}{\rho_f} \nabla \phi^{n+1}. \quad (2.36)$$

L'algorithme complet de la méthode de résolution de la phase fluide est schématisé sur la figure 2.5.

### 2.3.3 Schéma récapitulatif de la méthode de résolution de la phase fluide



**FIGURE 2.5** – Représentation schématique de l'algorithme de résolution de Jadim (inspiré de CHOUIPPE (2012)).  $N_L$  est le nombre de passage par la sous-boucle de forçage et  $N_{simu}$  le nombre total de pas de temps que l'on souhaite réaliser.

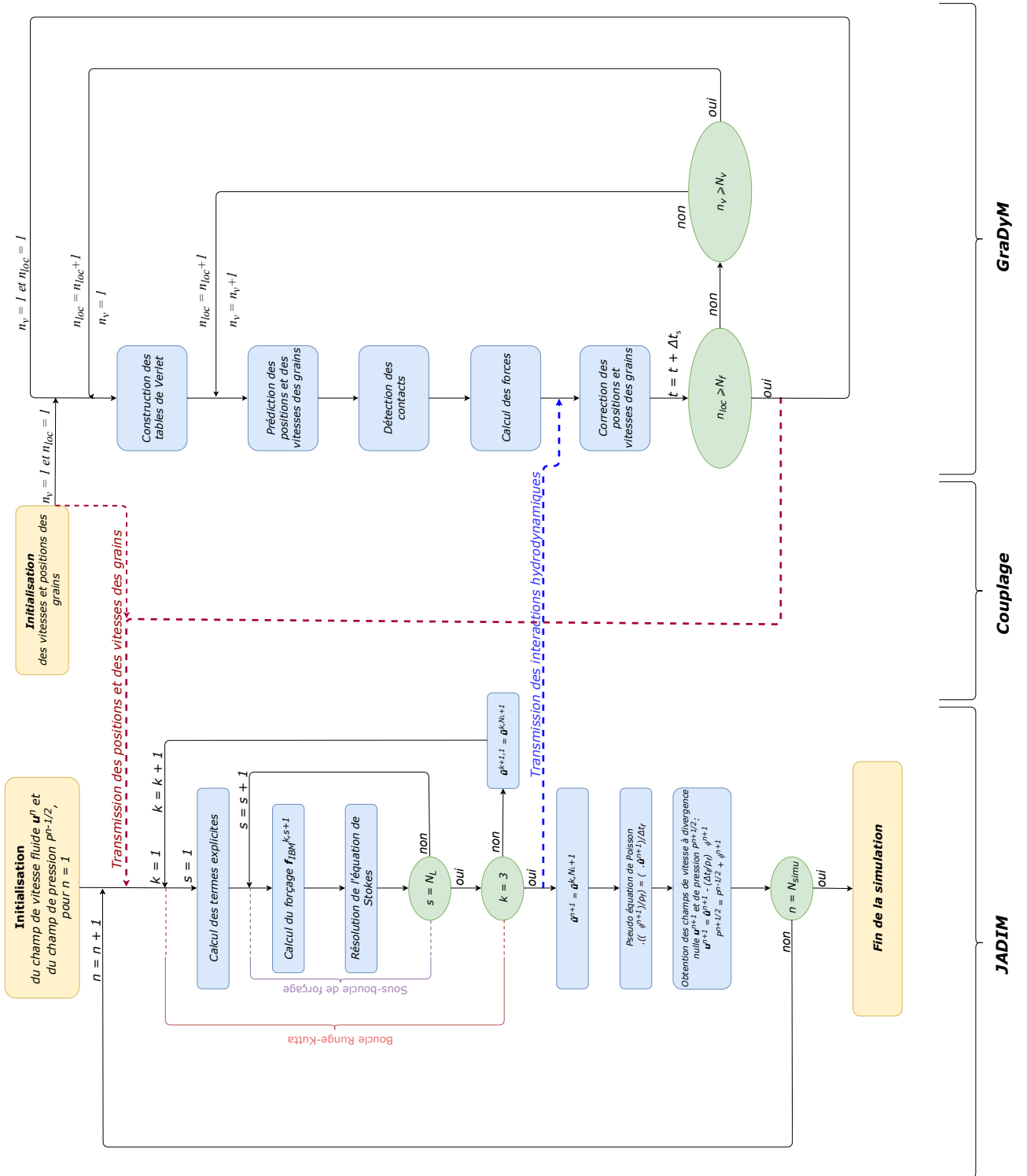
## 2.4 Couplage JADIM/GraDyM

Le couplage entre les deux logiciels, GraDyM et JADIM est schématisé sur la figure 2.6. On suppose ici que les temps caractéristiques liés aux contacts et que l'on note  $t_{col}$ , sont plus petits que les temps caractéristiques liés à l'écoulement du fluide ( $t_{fl}$ ). On peut donc se permettre de figer le fluide pendant plusieurs pas de temps granulaires. De ce fait, on choisit ici un pas de temps fluide  $\Delta_f$  tel que  $t_{col} \ll \Delta_f \ll t_{fl}$ . En pratique, on a  $\Delta_f \simeq 100t_{col}$ . De plus, on prend un pas de temps "solide"  $\Delta_s$  pour la résolution des forces associées aux contacts tel que  $\Delta_s \ll t_{col}$ , ici  $\Delta_s \simeq t_{col}/50$ . Ceci conduit à effectuer environ 5000 pas de temps solide (pour GraDyM) à chaque pas de temps fluide (JADIM). Notons que le temps de calcul passé dans GraDyM est négligeable devant celui passé dans JADIM dans les configurations que nous traiterons.

On peut noter qu'à aucun moment nous n'avons mentionné les forces de lubrification. Elles pourraient néanmoins être ajoutées avec un modèle de lubrification *had oc*. Nous avons pris le parti de ne pas les prendre en compte. Ce choix est motivé par la simplicité de l'interprétation et de la compréhension des différents mécanismes mis en jeu au risque que nos résultats "ne collent pas" à ceux d'expériences (de paillasse ou numériques). Les effets de lubrification seront captés par le maillage jusqu'à un certain point dépendant de la taille des mailles fluides. Tout devrait donc se passer comme si la taille caractéristique des mailles fluides (comparée au rayon des grains) était aussi la taille caractéristique des rugosités de nos grains.

La suite de ce chapitre va permettre, au travers de l'étude de quatre cas tests, de fixer un certain nombre des paramètres numériques intervenant dans le schéma de résolution ainsi que d'estimer les performances de la méthode mise en œuvre en prévision des simulations de lits granulaires cisailés.

## 2.4.1 Schéma récapitulatif de la méthode de résolution dans son ensemble

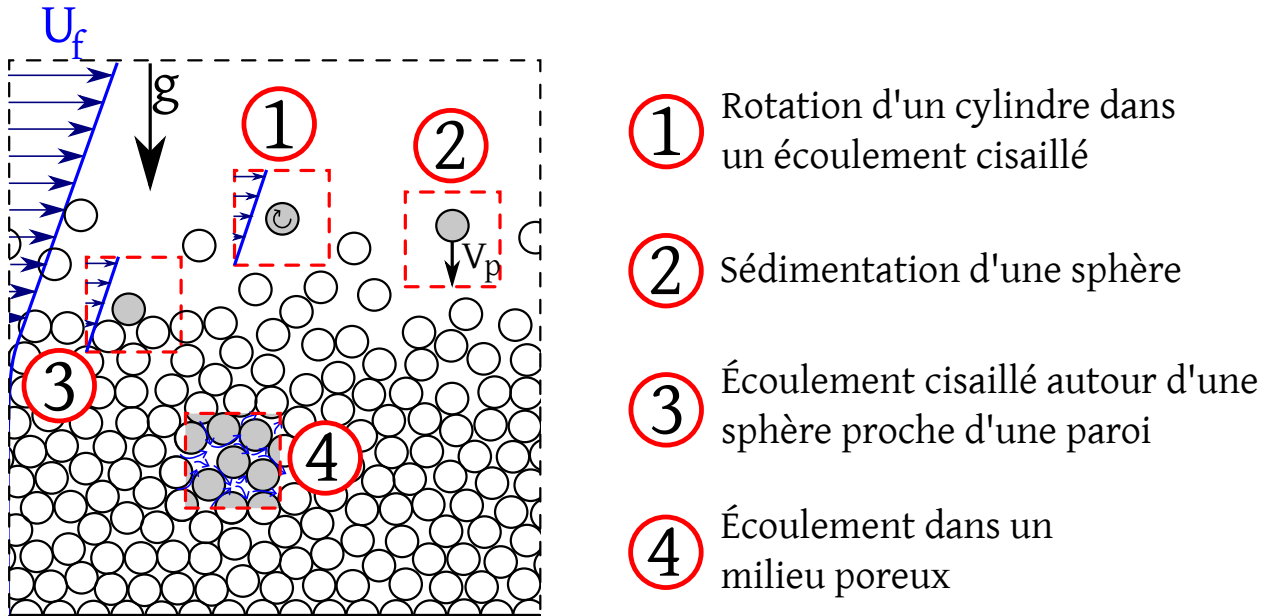


**FIGURE 2.6** – Représentation complète de l’algorithme de résolution couplé JADIM/GraDym.  $N_f$  est le rapport des pas de temps des deux solveurs  $\Delta t_f / \Delta t_s$ . Les autres notations sont identiques à celles utilisées dans les figures 2.2 et 2.5.

## 2.5 Validation de la méthode

Dans le cadre de cette thèse, nous considérons le problème du transport de grains formant un lit initialement statique par un écoulement cisailé de fluide visqueux. Lorsque le cisaillement est faible, le

lit granulaire reste immobile même si un écoulement de fluide est présent dans les premières couches de grains. À plus fort cisaillement, les grains à la surface du lit se mettent en mouvement sur une épaisseur plus ou moins grande (on parle de charriage). Enfin, si le cisaillement est grand, les grains peuvent être "emportés" dans la colonne d'eau (on parle alors de mise en suspension). La figure 2.7 illustre le problème visé et les cas-tests effectués.



**FIGURE 2.7** – Schéma du problème à résoudre et de contextualisation des cas-tests.

(1) : section 2.5.1; (2) : section 2.5.2; (3) : section 2.5.3; (4) : section 2.5.4.

Dans cette partie, on utilise la méthode de résolution développée précédemment pour résoudre des écoulements "académiques" afin d'estimer les performances de la méthode. Ces écoulements modèles étant largement décrits dans la littérature, nous comparons les résultats obtenus à ceux d'autres méthodes, quelles soient numériques ou expérimentales. Ces tests permettent également de choisir les valeurs des paramètres numériques qui ne seront pas modifiés par la suite.

Dans un premier temps le cas d'un cylindre dans un écoulement de Couette 2D est étudié ( $n^o1$  sur la figure 2.7), puis dans un second temps, le cas de la sédimentation d'une sphère dans un fluide au repos ( $n^o2$  sur la figure 2.7). Ces études préliminaires permettent de tester le couplage fluide-grain en rotation et en translation ainsi que de déterminer les valeurs des paramètres numériques à utiliser. Ensuite, nous considérerons le cas d'une sphère proche d'une paroi ( $n^o3$  sur la figure 2.7) et enfin l'écoulement dans un réseau dense de sphères ( $n^o4$  sur la figure 2.7) afin d'estimer la précision de la méthode IBM dans un cas où la description de l'écoulement dans la zone interfaciale devient crucial.

### 2.5.1 Rotation d'un cylindre dans un écoulement cisailé

On a évoqué dans la section 2.3.1 une dépendance relative du forçage avec le pas de temps  $\Delta t_f$ . Afin de voir cet effet et d'essayer de le limiter autant que possible, on étudie le cas d'un disque 2D dans un canal de Couette plan. Dans un premier temps on regarde comment varie la traînée de ce disque lorsque l'on fait varier le pas de temps. Ensuite on étudie l'impact des autres paramètres numériques sur la vitesse de rotation à l'équilibre de ce disque. Et enfin, on vérifiera les résultats obtenus en les comparant à ceux de PATANKAR et HU (2002) et à la solution théorique pour  $Re_p \rightarrow 0$  (GUAZZELLI et MORRIS (2011)).

### 2.5.1.1 Sensibilité aux paramètres numériques : cas du cylindre fixe

Pour cette étude, on se place dans un canal bidimensionnel soumis à un écoulement de Couette dont la plaque inférieure est fixe et la plaque supérieure se déplace à une vitesse  $U$ . On place au centre du canal un disque fixe, de diamètre  $d$  et on simule l'écoulement ainsi engendré. Le problème est schématisé sur la figure 2.8.

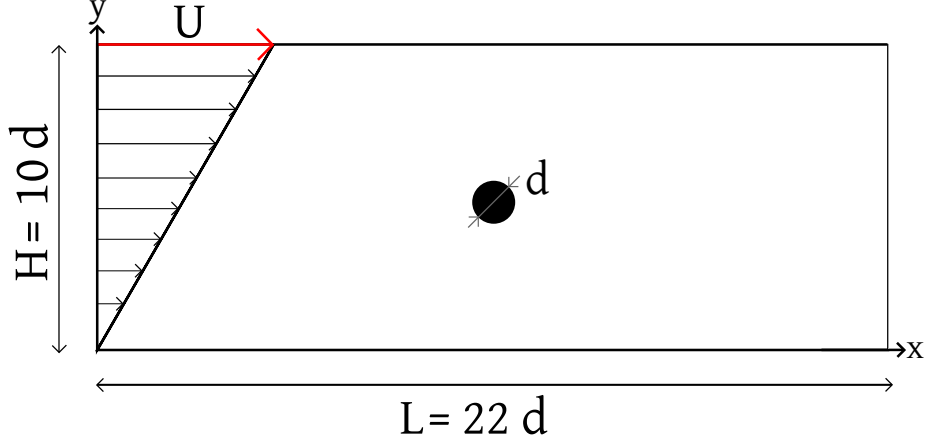


FIGURE 2.8 – Schéma du canal 2D pour le cas du cylindre fixe.

Le domaine possède les dimensions suivantes :  $H = 10d$ ,  $L = 22d$ . On impose une vitesse nulle en  $y = 0$  et une vitesse  $U = U_0$  en  $y = H$ . Les conditions limites en  $x = 0$  et  $x = L$  sont périodiques. Cela nous donne un cisaillement en l'absence du disque  $\dot{\gamma} = \frac{U_0}{H} = 0.1s^{-1}$  et on choisit la viscosité cinématique  $\nu_f = \frac{\eta_f}{\rho_f}$  du fluide telle que le nombre de Reynolds particulière vaille :

$$Re_p = \frac{\dot{\gamma}d^2}{\nu_f} = 10^{-1}. \quad (2.37)$$

On mesure alors la force appliquée sur le disque par le fluide dans le sens de l'écoulement en régime stationnaire ; on note cette force  $F_h$ . Nous regardons ici comment cette force varie avec le pas de temps. On se place dans un cas à faible nombre de Reynolds et avec une résolution spatiale faible ( $\Delta x = \Delta y = d/10$ ), et on mesure la force  $F_h$  pour observer cette variation afin de s'assurer qu'elle reste faible. Nous pouvons d'ores et déjà noter que la dépendance au pas de temps est d'autant plus marquée que le nombre de Reynolds basé sur la dimension de la particule (équation (2.37)) est faible (PIERSON (2015)). Nous nous plaçons donc dans un cas défavorable. Ici, le paramètre numérique principal de ce cas-test est le pas de temps  $\Delta t_f$ . Néanmoins, nous avons aussi fait varier d'autres "parametres" numériques qui sont :

- la résolution spatiale  $\frac{\Delta x}{d} = [\frac{1}{10}; \frac{1}{20}]$ ,
- le nombre de sous boucle de forçage  $N_l = [1; 2; 3; 4; 5]$  (voir par exemple la figure 2.6),
- le choix du  $\mathbf{u}_D$  intervenant dans le terme de forçage  $\mathbf{f}_{IBM}$  (équation (2.21)), à savoir sans interpolation ( $\mathbf{u}_D$  est la vitesse locale de la particule) ou avec interpolation ( $\mathbf{u}_D$  est définie par (2.25))

On a fait varier le pas de temps  $\Delta t_f$  dans la gamme  $5 \times 10^{-3} \leq \dot{\gamma}\Delta t_f \leq 1.74 \times 10^{-1}$ . Cette dernière valeur étant imposée par les critères de stabilité du schéma numérique. Cela correspond à 3.5 décades de variation du pas de temps. Les résultats sont résumés dans les tableaux 2.1 et 2.2. On notera *Interpolation = oui* si on utilise une méthode d'interpolation de la vitesse de la

frontière immergée et *non* sinon. On définit la variation relative de  $F_h$  par  $\delta = \frac{2 \cdot \Delta F_h}{\min(F_h) + \max(F_h) \Delta t_f}$  et  $\Delta F_h = \max_{\Delta t_f}(F_h) - \min_{\Delta t_f}(F_h) = F_h(\dot{\gamma} \Delta t_f = 5 \times 10^{-3}) - F_h(\dot{\gamma} \Delta t_f = 1.74 \times 10^{-1})$  est la variation de cette dernière sur la plage  $\Delta t_f$  explorée. Ici  $F_h$  est adimensionnée par  $\rho d^3 \dot{\gamma}^2$ .

Interpolation	$N_L$	$\min_{\Delta t_f}(F_h)$	$\max_{\Delta t_f}(F_h)$	$\Delta F_h$	$\delta$
<i>non</i>	1	2.28420	2.44250	0.15830	6.70%
	2	2.35428	2.47255	0.11827	4.90%
	3	2.36962	2.49059	0.12097	4.98%
	4	2.38127	2.50204	0.12077	4.95%
	5	2.39019	2.51013	0.11994	4.90%
<i>oui</i>	1	2.28122	2.40926	0.12804	5.46%
	2	2.35217	2.42824	0.07607	3.18%
	3	2.36396	2.43989	0.07593	3.16%
	4	2.37264	2.44728	0.07464	3.10%
	5	2.37920	2.45244	0.07324	3.03%

**TABLE 2.1** – Variation de la force  $F_h$  appliquée au cylindre pour  $5 \times 10^{-3} \dot{\gamma}^{-1} \leq \Delta t_f \leq 1.74 \times 10^{-1} \dot{\gamma}^{-1}$  et pour différents choix de paramètres numériques (avec  $\Delta x = \Delta y = d/10$ ) : prise en compte, ou non, de la vitesse interpolée (Interpolation = oui/non); nombre de sous-boucle de forçage ( $N_L$ ).

Le tableau 2.2 présente les résultats en fonction du maillage ( $\Delta x = \Delta y = d/10$  et  $d/20$ ). La limitation due au critère de stabilité du schéma numérique change d'un maillage à l'autre. Pour comparer, on se place aux mêmes valeurs de  $\Delta t_f$ ; du plus bas  $\dot{\gamma} \Delta t_f = 5 \times 10^{-3}$  au plus haut, qui est désormais  $\dot{\gamma} \Delta t_f = 8.65 \times 10^{-2}$ .

$d/\Delta x = d/\Delta y$	$\min_{\Delta t_f}(F_h)$	$\max_{\Delta t_f}(F_h)$	$\Delta F_h$	$\delta$
10	2.31302	2.44250	0.12948	5.45%
20	2.36076	2.41948	0.05872	2.46%

**TABLE 2.2** – Variation de la force  $F_h$  appliquée au cylindre pour  $\Delta x = \Delta y = d/10$  et  $d/20$ . Ici,  $5 \times 10^{-3} \leq \dot{\gamma} \Delta t_f \leq 8.65 \times 10^{-2}$ ,  $N_L = 1$  et Interpolation = non.

Le tableau 2.1 montre que l'utilisation de l'interpolation de la vitesse de la frontière immergée permet de réduire la dépendance de la force  $F_h$  avec le pas de temps. Puisque  $\delta$  diminue de 20 à 47% en fonction du nombre de passages dans la sous-boucle de forçage. Le schéma numérique avec interpolation de la vitesse à la frontière semble donc plus robuste (LUO *et al.* (2009); PIERSON (2015)) et on choisira alors d'utiliser cette méthode par la suite.

Ensuite, on peut voir que de passer de  $N_L = 1$  à  $N_L = 2$  permet un gain sur la dépendance au pas de temps de  $F_h$ , de l'ordre de 1.5 à 2% en absolu (soit un gain relatif d'environ 30% sans l'interpolation de la vitesse et 50% avec). Les passages suivants par cette sous-boucle ( $N_L \geq 3$ ) n'apportent qu'une amélioration très faible pour un temps de calcul supplémentaire non-négligeable. Afin d'obtenir des résultats moins sensibles à la valeur de  $\Delta t$  pour un coût en temps de calcul raisonnable, on choisira par la suite de faire 2 passages par l'étape de forçage de la vitesse ( $N_L = 2$ ).

Enfin, regardons la comparaison avec la solution sur un maillage plus fin (tableau 2.2). Les variations de la force  $F_h$  sont divisées par au moins deux sur la plage de  $\Delta t$  explorée. Bien que le coût de

simulation en temps de calcul soit nettement augmenté, surtout pour des simulations 3D, raffiner davantage le maillage diminue fortement la dépendance de la force  $F_h$  au pas de temps  $\Delta t_f$ .

### 2.5.1.2 Cas du cylindre en rotation libre

On se place maintenant dans un écoulement de Couette symétrique (les vitesses des parois supérieure et inférieure sont égales et de sens opposées), et on libère en rotation le disque. La géométrie et les notations sont données sur la figure 2.9. Les notations restent les mêmes que précédemment et on appelle  $\Omega$  la vitesse de rotation du disque. Les conditions limites sont toujours périodiques en  $x = 0$  et  $x = L$  et désormais on prend  $H = 22d$ .

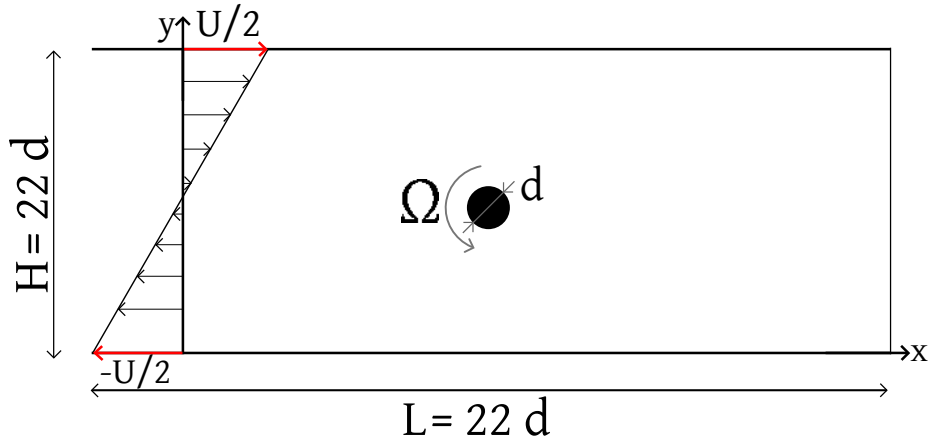


FIGURE 2.9 – Schéma du canal 2D pour le cas du disque en rotation libre.

Pour ce cas test, on étudie la dépendance de la vitesse de rotation du disque en régime stationnaire vis-à-vis de l'épaisseur des frontières immergées, notée  $\Delta$  et introduite dans l'équation (2.22), et du raffinement du maillage. On compare nos résultats à ceux de PATANKAR et HU (2002) en considérant les leurs comme référence. En effet, ils résolvent le même problème mais à l'aide d'un schéma basé sur la méthode des éléments finis de type ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Technique) qui est a priori plus précise que la méthode IBM. De plus qu'ils utilisent 88 mailles par diamètre alors que nous n'en avons que 10 ou 20 ici. On choisit donc les paramètres tels que le nombre de Reynolds particulière soit :

$$Re_p = \frac{\dot{\gamma} d^2}{\nu} = 9.091. \quad (2.38)$$

Nous avons utilisé un maillage irrégulier pour diminuer le temps de calcul. Il est constitué d'un bloc central régulier de taille  $3d \times 3d$  centré sur le disque (dont le raffinement est celui dont nous parlerons dans la suite) et il se relâche dans les directions  $x$  et  $y$  en s'éloignant du bloc central. Le domaine de simulation a pour dimensions  $L = H = 22d$ . Ces dimensions ont été choisies suffisamment grandes par PATANKAR et HU (2002) afin d'obtenir des résultats quasi-indépendants de la taille du domaine de simulation. Nous avons vérifié la véracité de l'utilisation de ce maillage par rapport à un maillage régulier. Ces informations sont disponibles dans l'annexe B. Nous avons fait varier la résolution spatiale ( $\Delta x = \Delta y = d/10$  ou  $d/20$ ) et l'épaisseur de la frontière immergée,  $\Delta$ , entre  $\Delta x$  et  $2.6\Delta x$ . Rappelons que la frontière est définie par la fonction  $\alpha$  de forme sinusoïdale dont l'expression est donnée par l'équation (2.22). On rappelle que la fonction  $\alpha$  varie de 0 à 1 sur un intervalle de taille  $2\Delta$ . Le tableau 2.3 présente les résultats obtenus pour différents raffinements  $\Delta x = \Delta y$  et différentes épaisseurs  $\Delta$ .



$d/\Delta x = d/\Delta y =$	$\Delta/\Delta x$	$\Omega$	$\epsilon$
10	1	-0.412693	2.50%
	1.5	-0.417854	3.79%
	2	-0.419839	4.28%
20	1	-0.407122	1.12%
	1.5	-0.407680	1.26%
	2	-0.411370	2.18%
Référence : Simulation spectrale de PATANKAR et HU (2002)		-0.402609	—

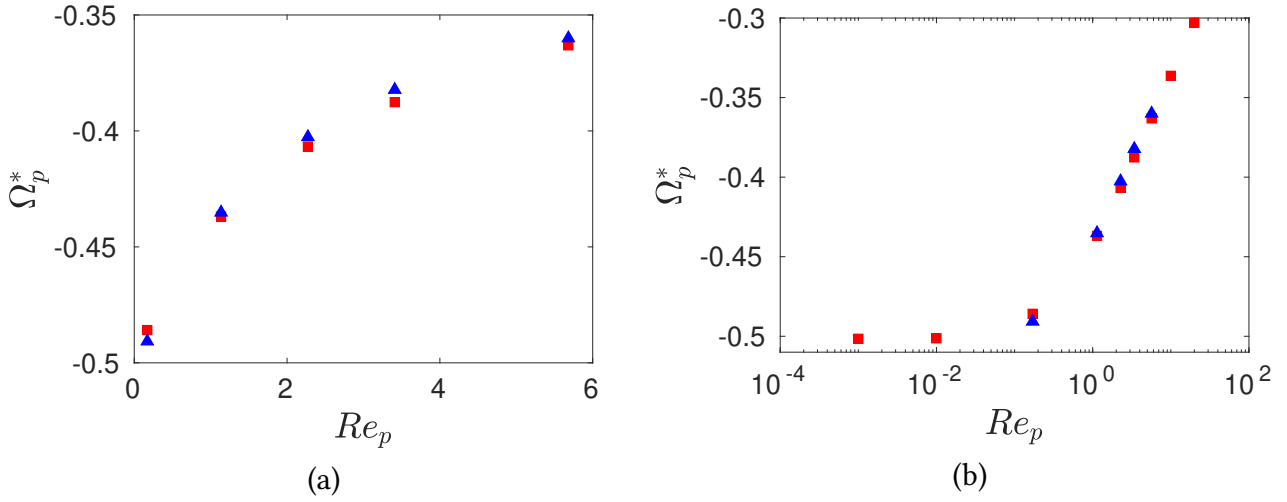
**TABLE 2.3** – Vitesse de rotation stationnaire du cylindre  $\Omega$  (adimensionnée par  $\dot{\gamma}$ ) en fonction de la résolution spatiale  $d/\Delta x$  et de l'épaisseur de la frontière immergée  $\Delta$ . On ajoute le résultat de PATANKAR et HU (2002) pour le même nombre de Reynolds :  $Re_p = 9.091$ , cette solution servant de référence pour calculer l'erreur relative  $\epsilon$ .

On peut voir sur ce tableau que l'erreur  $\epsilon$  sur  $\Omega$  diminue quand la résolution spatiale augmente et que l'épaisseur de la frontière diminue. On aurait donc intérêt à prendre un maillage raffiné avec une faible épaisseur de l'interface. Toutefois, un trop fort raffinement abouti très rapidement à des durées de simulation longues et une trop faible épaisseur de l'interface IBM conduit à des oscillations de la force  $F_h$  au passage des frontières entre mailles voisines (dans le cas d'une frontière mobile, ce qui sera le cas par la suite). On va quantifier ces oscillations sur le cas test de la sédimentation d'une sphère (section 2.5.2), ce qui nous permettra de prendre une décision quant à l'épaisseur des interfaces IBM à choisir. Les deux cas : " $d/\Delta x = 10$  et  $\Delta = \Delta x$ " et " $d/\Delta x = 20$  et  $\Delta = 2\Delta x$ " sont intéressants car ils possèdent la même "épaisseur physique" de l'interface ( $\Delta/d = 0.1$ ), or on obtient une diminution de l'erreur sur la vitesse de rotation en augmentant la résolution du maillage. Cette diminution peut alors être attribuée à l'effet du maillage indépendamment des autres paramètres numériques.

Soulignons enfin qu'ici, l'erreur relative sur la vitesse de rotation vis-à-vis de la solution de référence de PATANKAR et HU (2002) est inférieure à 5% quelque soient les paramètres numériques et ce, même avec une faible résolution spatiale ( $d/\Delta x = 10$ ), soit 9 fois moins que ces auteurs qui ont  $d/\Delta x \simeq 88$ .

### 2.5.1.3 Vitesse de rotation en fonction du nombre de Reynolds

On va se pencher sur l'évolution de la vitesse de rotation du cylindre en fonction du nombre de Reynolds. On vérifie ainsi que les paramètres choisis conviennent sur toute la plage de nombre de Reynolds explorée. Les paramètres numériques utilisés sont :  $\Delta = 1.5\Delta x$  et  $\Delta x = d/20$ ,  $N_L = 1$  et on a utilisé l'interpolation de la vitesse pour le forçage IBM. Nous avons fait varier le nombre de Reynolds dans la gamme  $10^{-3} \lesssim Re_p \lesssim 20$ . Les résultats que nous avons obtenus sont représentés sur la figure 2.10. La figure 2.10(a) présente nos résultats en échelle linéaire. Sur la figure 2.10(b), on a tracé les mêmes grandeurs en échelle logarithmique dans la gamme complète de nombre de Reynolds.



**FIGURE 2.10** – Vitesse de rotation stationnaire du cylindre  $\Omega$  (adimensionnée par  $\dot{\gamma}$ ) en fonction du nombre de Reynolds (a) échelle linéaire; (b) échelle logarithmique.  
 (■) : résultats de cette étude; (▲) : PATANKAR et HU (2002).

On peut voir sur cette figure que la norme de la vitesse de rotation du cylindre augmente lorsque le nombre de Reynolds diminue. Pour  $Re_p \geq 1$ ,  $\Omega$  varie linéairement avec le logarithme de  $Re_p$ . Pour les nombres de Reynolds plus faibles,  $\Omega$  tend vers une constante quand  $Re_p \rightarrow 0$ . On observe un bon accord de nos données avec les résultats de PATANKAR et HU (2002), l'erreur relative sur  $\Omega_p$  ne dépassant pas 1.4%.

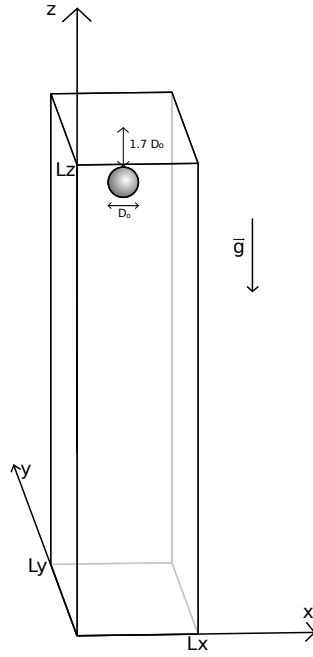
Si on ajuste les points par une loi de puissance du type  $\Omega_p^* = \xi Re_p^\beta$  (pour  $Re_p \in [1.136; 5.682]$ ), on trouve que  $\xi = -0.445$  et  $\beta = -0.115$  ( $R^2 = 0.9970$ ) alors qu'avec les résultats de PATANKAR et HU (2002), ces coefficients valent  $\xi_{PH} = -0.442$  et  $\beta_{PH} = -0.118$  ( $R_{PH}^2 = 0.9994$ ). De plus, lorsque le nombre de Reynolds diminue  $\Omega_p \rightarrow -\frac{\dot{\gamma}}{2}$ , qui est la solution théorique dans la limite à Reynolds nul et dans un domaine non borné (voir l'annexe C pour une démonstration).

## 2.5.2 Sédimentation d'une sphère

On étudie maintenant la sédimentation d'une sphère dans un fluide initialement au repos et on compare l'évolution temporelle de la vitesse de sédimentation aux expériences de MORDANT et PINTON (2000). L'expérience est faite dans l'eau, la sphère fait 0.5 mm de diamètre et une densité de 2.56. Dans l'expérience, le récipient fait 1.1 m de large, 0.65 m de long et est profond de 65 cm. La vitesse terminale mesurée est de 7.41 cm/s et 95% de cette dernière est atteinte en  $\tau^{95} = 55$  ms. Cela correspond à un nombre de Reynolds basé sur la vitesse terminale  $V_{lim}$  de

$$Re = \frac{\rho_f d V_{lim}}{\eta_f} = 41. \quad (2.39)$$

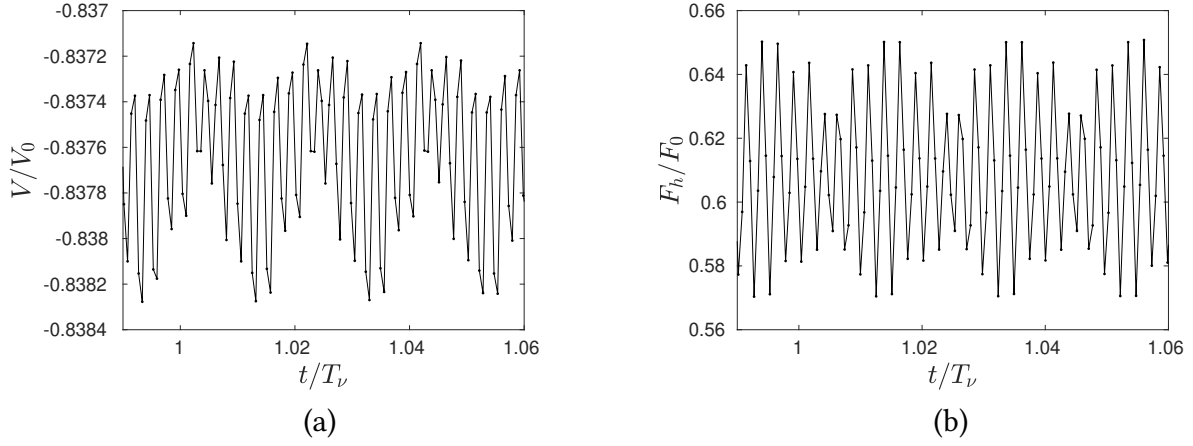
Pour simuler ce problème, on s'est placé en 2D axisymétrique et en 3D sur un maillage régulier avec des résolutions spatiales de  $d/\Delta x = d/\Delta y = d/\Delta z = 10$  ou 20. Pour adimensionner le problème, on utilise le diamètre  $d$  de la sphère comme échelle de longueur,  $V_0 = \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho_f} g d}$  comme échelle de vitesse et  $T_\nu = \frac{\rho_f d^2}{\eta_f} = \frac{d^2}{\nu_f}$  comme échelle de temps. Les paramètres physiques sont choisis de sorte que le rapport des masses volumiques vaille  $r = \frac{\rho_p}{\rho_f} = 2.56$  et le nombre de Galilée  $Ga = \frac{d}{\nu_f} \sqrt{\frac{\Delta \rho}{\rho_f} g d} = 49$ .



**FIGURE 2.11** – Domaine de calcul et condition initiale pour la simulation de la sédimentation d’une sphère.

Pour les cas 3D, la taille du domaine simulé est bien plus faible que la taille du récipient utilisé dans les expériences. Pour éviter une sur-dissipation engendré par le confinement, des conditions limites de glissement sans frottement (free-slip) sont appliquées sur les bords du domaine. On a pris la même taille de domaine que KEMPE et FRÖHLICH (2012) dans leurs simulations, à savoir  $L_x \times L_y \times L_z = 7.5d \times 7.5d \times 60.7d$ , ces auteurs s’étant assurés que le domaine simulé était suffisamment grand pour que la vitesse de sédimentation obtenue n’en dépende pas. La sphère est lâchée à  $t = 0$  sans vitesse initiale, à 1.7 diamètre du haut du domaine et le pas de temps fluide  $\Delta t_f$  des simulations est choisi tel que le coefficient de Courant–Friedrichs–Lewy  $C_{CFL} = \frac{\Delta t_f V_{lim}}{\Delta x} \simeq 0.25$ , comme pour les simulations de KEMPE et FRÖHLICH (2012).

Avant de considérer l’évolution de la vitesse de sédimentation de la sphère, on se propose, dans un premier temps, de quantifier les oscillations de la force hydrodynamique lors du mouvement de la particule. On compare les ratios  $\Delta F/F_h$  et  $\Delta V/V$  en régime stationnaire, où  $\Delta F$  et  $\Delta V$  correspondent respectivement à l’amplitude des oscillations de la force  $F_h$  et de la vitesse verticale  $V$ . Un exemple d’oscillations de la vitesse (respectivement de la force hydrodynamique) est tracé sur la figure 2.12 (a) (respectivement sur 2.12 (b)). Les résultats obtenus pour  $Re = 41$  sont présentés dans le tableau 2.4.



**FIGURE 2.12** – (a) : Oscillations de la vitesse de sédimentation  $V$  de la sphère et (b) : Oscillations de la force hydrodynamique  $F_h$  exercée par le fluide sur la sphère ( $Re = 41$ ,  $d/\Delta x = 10$  et  $\Delta/\Delta x = 1.3$ ). La force hydrodynamique est adimensionnée par avec  $F_0 = \rho_p V_p g$ .

$d/\Delta x$	$\Delta/\Delta x$	$\Delta F/F_h$ (%)	$\Delta V/V$ (%)
10	1.3	13.1	0.14
	2.6	6.6	0.09
20	1.3	2.2	0.009
	2.6	1.7	0.008

**TABLE 2.4** – Amplitude des oscillations de la force hydrodynamique  $F_h$  et de la vitesse  $V$  de la sphère (cas 3D).  $\Delta$  est l'épaisseur de la frontière immergée définie dans l'équation (2.22).

On observe des oscillations de  $F_h$  pour une particule mobile. Toutefois, ces oscillations diminuent rapidement avec le raffinement du maillage et avec l'élargissement de la frontière IBM. De plus, les oscillations de  $F_h$  ont un impact assez faible sur la vitesse de chute. Dans le cas le plus sévère, où les oscillations représentent près de 14% du forçage total, on obtient seulement 0.14% de variation sur la vitesse du grain. Des oscillations de cette amplitude sont tout à fait acceptables pour notre étude et on pourra alors choisir d'utiliser des faibles épaisseurs de frontière IBM, typiquement  $\Delta = 1.3\Delta x$ . On trace sur la figure 2.13 l'évolution temporelle de la vitesse obtenue expérimentalement par MORDANT et PINTON (2000) et ceux obtenus lors de cette étude.

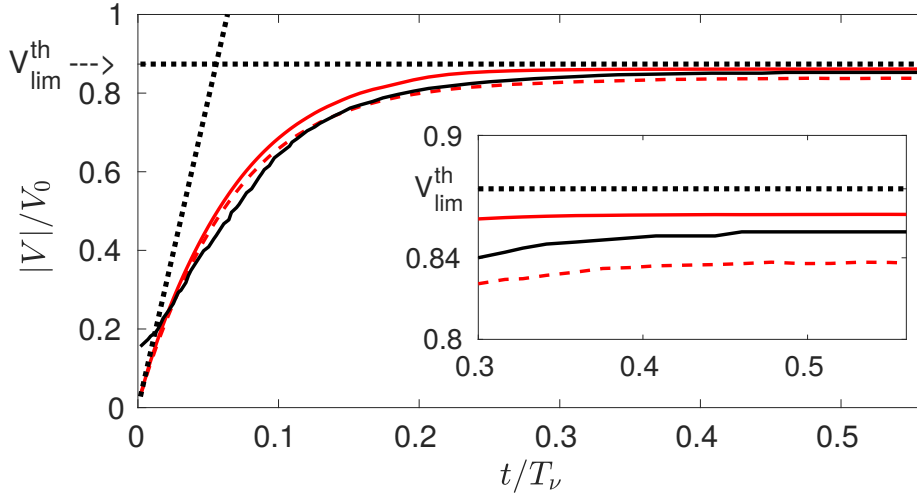
On peut calculer la vitesse limite de sédimentation  $V_{lim}^{th}$  en écrivant l'égalité de la force de traînée et de la flottabilité. On obtient alors :

$$V_{lim}^{th} = \sqrt{\frac{V_p |\rho_p - \rho_f| g}{\frac{1}{2} C_D \rho_f \pi R^2}} \simeq 0.874 V_0, \quad (2.40)$$

où le coefficient de traînée  $C_D$  peut être estimé à l'aide de la corrélation de Schiller et Neumann  $C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0.15 Re^{0.687})$  (CLIFT et al. (2005)). On connaît également l'accélération initiale de la sphère. En effet, la flottabilité et la force de masse ajoutée sont les forces dominantes lors de cette phase. Et on peut alors écrire :

$$\frac{dV}{dt}(t = 0^+) = \frac{(\rho_p - \rho_f)g}{\rho_p + C_M \rho_f}, \quad (2.41)$$

où  $C_M$  est le coefficient de masse ajoutée qui vaut  $\frac{1}{2}$  pour une sphère. Ces deux limites théoriques sont également représentées sur la figure 2.13 par des droites en pointillés noirs.



**FIGURE 2.13** – Vitesse de chute d’une sphère dans un fluide au repos ( $Re = 41$ ). La courbe noire correspond à l’expérience de MORDANT et PINTON (2000). Présente étude 3D en rouge : (– –)  $d/\Delta x = 10$ ; (–)  $d/\Delta x = 20$ ; ( $\cdots$ ) solutions théoriques aux temps courts et aux temps longs.

domaine	$d/\Delta x =$	$V_{lim}/V_0$	$\epsilon_V$	$\tau/T_v$	$\epsilon_\tau$
étude présente (2D-Axisymétrique)	10	0.8272	−5.33%	$6.68 \times 10^{-2}$	8.89%
	20	0.8752	+0.16%	$6.69 \times 10^{-2}$	8.84%
étude présente (3D)	10	0.8377	−4.13%	$6.58 \times 10^{-2}$	10.30%
	20	0.8613	−1.43%	$6.49 \times 10^{-2}$	11.46%
MORDANT et PINTON (2000)		0.8527	−2.41%	$7.33 \times 10^{-2}$	—
solution (2.40)		0.8738	—	—	—

**TABLE 2.5** – Vitesse limite de sédimentation et temps caractéristique d’accélération obtenue expérimentalement et par notre méthode numérique pour  $Re = 41$ . Les erreurs relatives sont calculées en prenant l’expérience de MORDANT et PINTON (2000) comme référence pour le temps caractéristique d’accélération et en prenant la solution (2.40) pour la vitesse limite de sédimentation.

On réalise des ajustements de nos courbes temporelles de vitesse de chute par la fonction  $V(t) = V_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  afin d’y attribuer une vitesse limite et un temps caractéristique d’accélération. Pour les résultats de MORDANT et PINTON (2000), on utilise le fait que  $\tau^{95} = 3\tau$  ( $\tau^{95}$  correspond au temps pour atteindre 95% de la vitesse terminale. Ce temps a été mesuré lors des expériences). Cette solution exponentielle n’est valable que pour des nombres de Reynolds vérifiant  $Re \ll 1$  mais elle permet d’obtenir simplement un temps caractéristique d’accélération ainsi que la valeur de la vitesse terminale. À la vue du tableau 2.5 et des courbes de la figure 2.13, on peut dire que la dynamique de la sphère en sédimentation est bien reproduite. On peut aussi remarquer que les temps caractéristiques d’accélération dépendent peu du raffinement du maillage. Les 10% d’erreur peuvent paraître important, mais on compare nos résultats à des données expérimentales qui sont donc sujettes à des erreurs de mesure. Par exemple, si on effectue un décalage de l’origine des temps de l’expérience de seulement  $10^{-2}T_v = 2.5ms$ , on obtient  $\tau = 6.49 \times 10^{-2}T_v$ , c’est à dire exactement le temps obtenu dans la simulation 3D avec 20 mailles par diamètre. Sur la figure 2.13, la pente à l’origine correspond bien à l’accélération initiale obtenue via nos simulations. Pour la vitesse limite de sédimentation, on peut voir qu’elle augmente lorsqu’on raffine davantage le maillage et qu’elle varie moins vite sur un maillage 3D qu’axisymétrique. Encore une fois, les erreurs commises avec la méthode IBM restent modérées, de l’ordre de quelques pourcents et ceux même pour des maillages

qualifiables de grossiers ( $d/\Delta x = 10$ ). L'erreur est inférieure au pourcent dès qu'on monte à 20 mailles par diamètre. Les effets dynamiques semblent relativement bien captés et peu dépendants du maillage.

### 2.5.3 Écoulement cisailé autour d'une sphère proche d'une paroi

On étudie maintenant le cas d'une sphère en proche paroi pour vérifier que les performances de la méthode IBM ne se dégradent pas lorsque le grain est pratiquement au contact. On place une sphère fixe près d'une paroi dans un domaine 3D. On note  $L$  la distance entre la paroi et le centre de la sphère. L'écoulement à l'amont est un cisaillement simple dans la direction  $x$  et la vitesse de la paroi en  $y = L_y$  est imposée à la valeur  $U_0$  (voir la figure 2.14). Sur la paroi en  $y = 0$ , la condition d'adhérence (vitesse nulle) est appliquée. On choisit d'utiliser le diamètre  $d$  de la sphère comme échelle de longueur et  $U_0 = \dot{\gamma}L$  comme échelle de vitesse, où  $\dot{\gamma}$  est le cisaillement en l'absence de sphère. Le domaine de simulation a une taille  $[0, L_x] \times [0, L_y] \times [0, L_z] = [0, 24] \times [0, L + 8] \times [0, 7]$  et la sphère est placée en  $\vec{x} = (8, L, 7)$ . On a effectué nos simulations à un nombre de Reynolds  $Re = \frac{\dot{\gamma}Ld}{\nu} = 10$  pour deux positions de la sphère : en  $L = 0.505$  et  $L = 1$ . On utilise un maillage régulier cartésien avec une taille de maille  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = d/20$ . Pour des raisons de symétrie de l'écoulement, le calcul est effectué sur le demi-espace défini par le plan  $(x, y)$  passant par le centre de la sphère. Les conditions limites sont périodiques dans la direction  $x$ , des conditions de glissement sans frottement (free-slip) sont appliquées en  $z = 0$  et  $z = L_z$  et la vitesse est imposée à 0 (respectivement  $U_0 = \dot{\gamma}L_y$ ) au niveau de la paroi en  $y = 0$  (respectivement  $y = L_y$ ). Notons que, sur la surface de la sphère, c'est une condition d'adhérence qui est imposée via la méthode de frontière immergée (*i.e.* la vitesse de la sphère est imposée nulle).

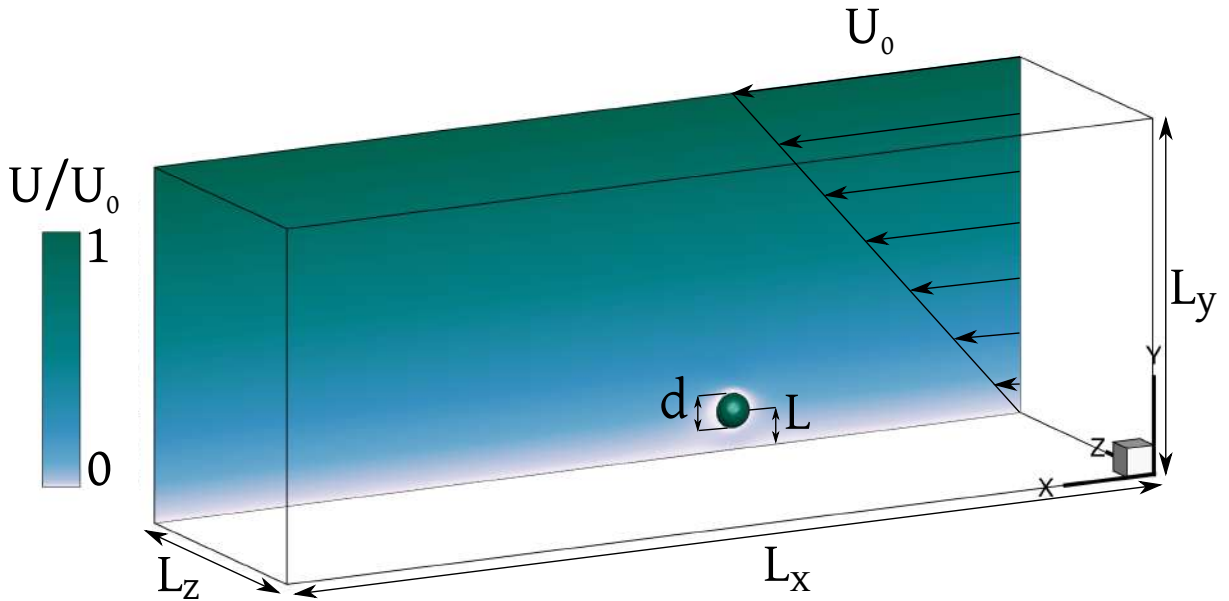


FIGURE 2.14 – Domaine de calcul utilisé pour le cas test d'une sphère proche d'un paroi.

Lorsque l'écoulement est stationnaire, on compare les coefficients de traînée, de portance et de moment obtenus via nos simulations à ceux obtenus par ZENG *et al.* (2009) qui utilisent une méthode spectrale sur un maillage qui épouse la géométrie de la sphère et du domaine. On compare également les extrema de vorticité (composante selon l'axe  $Z$ ) et de pression, ainsi que la position sur la surface de la sphère où la pression change de signe, le tout dans le plan de symétrie  $z = 0$ .

Afin de calculer les coefficients aérodynamiques, on utilise les définitions suivantes :

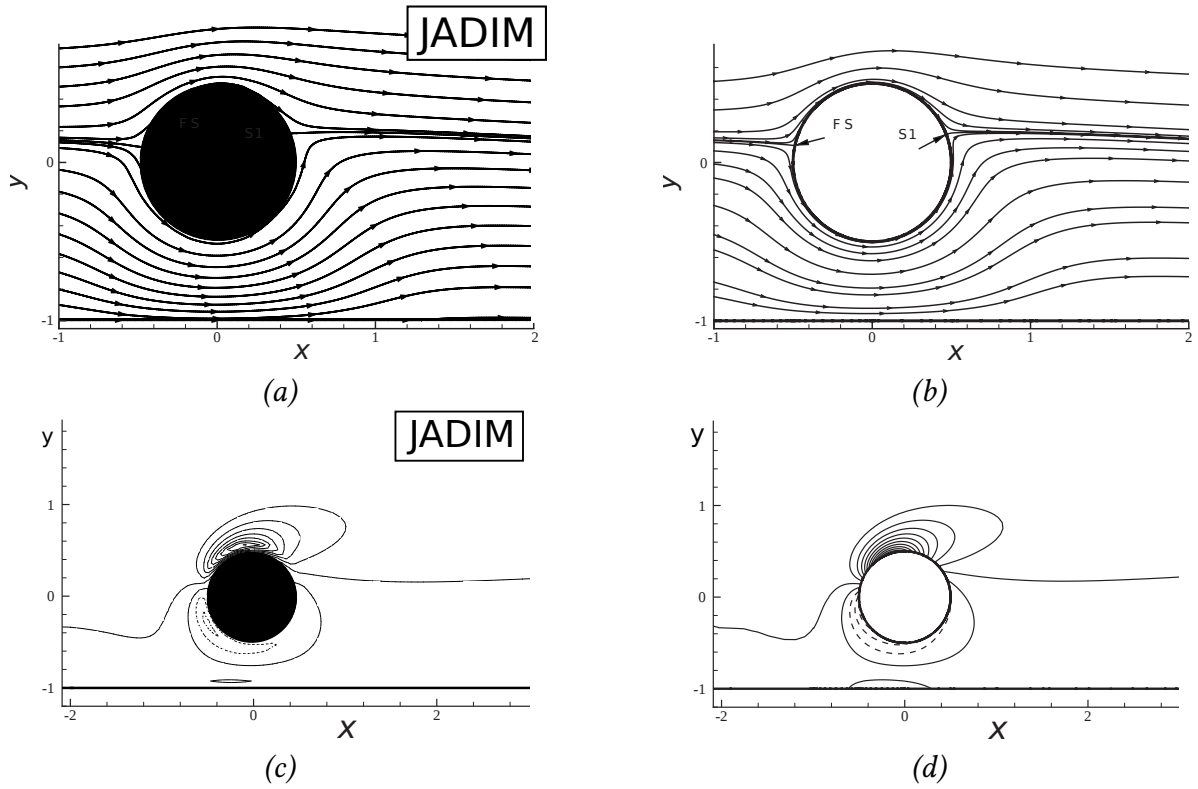
$$\begin{aligned}
C_d &= \frac{F_x}{\frac{1}{2} \rho_f U_0^2 S}, \\
C_l &= \frac{F_y}{\frac{1}{2} \rho_f U_0^2 S}, \\
C_m &= \frac{-\Gamma_z}{\frac{d}{4} \frac{1}{2} \rho_f U_0^2 S},
\end{aligned} \tag{2.42}$$

où  $S = \pi \frac{d^2}{4}$  est la surface apparente des grains et  $\rho_f$  la masse volumique du fluide.  $F_x$ ,  $F_y$  et  $\Gamma_z$  sont trois des six composantes de la force hydrodynamique  $\mathbf{F}_h$  et du couple  $\mathbf{\Gamma}_h$  issus de la méthode des frontières immergées.

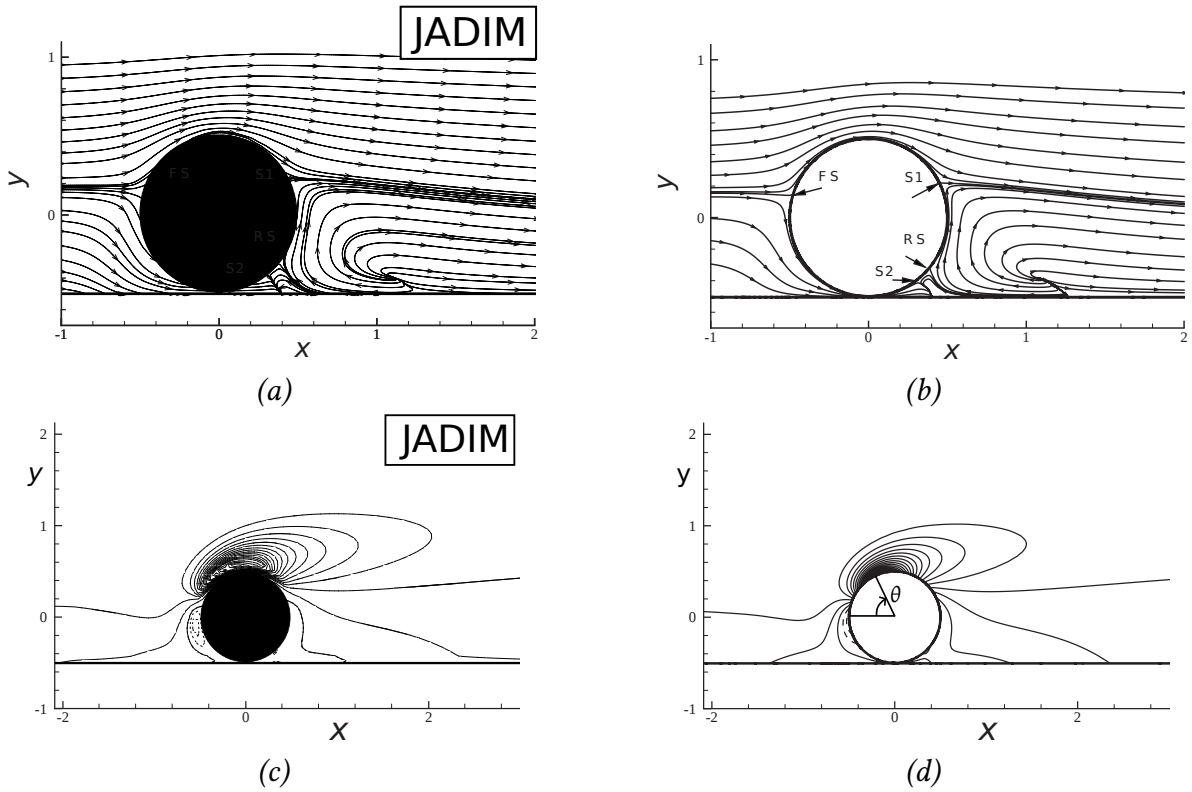
On présente les champs de vorticité et de ligne de courant dans le plan  $z = 0$  sur les figures 2.15 et 2.16 en les comparant à ceux obtenus par ZENG *et al.* (2009). Les résultats pour les coefficients hydrodynamiques, les bornes de la vorticité selon  $Z$  et de la pression sont donnés sur le tableau 2.8.

$L =$		$C_d$	$C_l$	$C_m$
1	étude présente	4.985	$7.224 \times 10^{-1}$	$8.124 \times 10^{-1}$
	ZENG <i>et al.</i> (2009)	5.123	$7.487 \times 10^{-1}$	$7.999 \times 10^{-1}$
	erreur relative en %	2.69	3.51	1.56
0.505	étude présente	6.234	1.248	1.783
	ZENG <i>et al.</i> (2009)	6.489	1.315	1.786
	erreur relative en %	3.93	5.10	0.17

**TABLE 2.6** – Coefficients hydrodynamiques pour  $Re = 10$  et pour deux distances de la paroi ( $L = 1$  et  $L = 0.505$ ). Pour les valeurs obtenues par ZENG *et al.* (2009), on prend celles obtenues sur leur domaine  $\mathcal{D}_1$  (tables I et II) et on s'en sert comme référence pour le calcul des erreurs relatives.



**FIGURE 2.15** – Lignes de courant dans le plan  $z = 0$  obtenues : (a) : via la présente méthode; (b) par ZENG et al. (2009). Lignes d'iso-vorticité dans le plan  $z = 0$  obtenues via : (c) : la présente méthode; (d) : par ZENG et al. (2009) ( $Re = 10$  et  $L = 1$ ).



**FIGURE 2.16** – Lignes de courant dans le plan  $z = 0$  obtenues, (a) : via la présente méthode; (b) par ZENG et al. (2009). Lignes d'iso-vorticité dans le plan  $z = 0$  obtenues, (c) : via la présente méthode; (d) : par ZENG et al. (2009) ( $Re = 10$  et  $L = 0.505$ ).



$L =$		$\omega_{z,min}$	$\omega_{z,max}$	$P_{min}$	$P_{max}$	$\theta(^{\circ})$
1	étude présente	-9.069	2.256	-0.993	1.338	67.63
	ZENG <i>et al.</i> (2009)	-12.251	3.654	-0.919	1.307	70.0
	erreur relative en %	25.97	38.26	8.05	2.37	3.39
0.505	étude présente	-13.67	1.231	-1.377	1.362	67.56
	ZENG <i>et al.</i> (2009)	-9.471	1.492	-0.417	0.453	67.89
	erreur relative en %	44.34	17.49	230	201	0.49

**TABLE 2.7** – Bornes de vorticité et de pression. Position du changement de signe de la pression dans le plan  $z = 0$  pour  $Re = 10$  et pour deux distances de la paroi ( $L = 1$  et  $L = 0.505$ ). Pour les valeurs obtenues par ZENG *et al.* (2009), on prend celles obtenues sur leur domaine  $\mathcal{D}_1$  (leur table I et II) et on s'en sert comme référence pour le calcul des erreurs relatives.  $\theta$  est l'angle par rapport ( $Ox$ ) auquel la pression à la surface de la sphère change de signe (dans le plan de symétrie  $z = 0$  et sur l'hémisphère opposé à la paroi, voir la figure 2.16 (d)).

Les positions des points remarquables des lignes de courant : les points de stagnation, notés S1 et S2, et points de séparation, notés FS et RS (voir les figures 2.15 (b) et 2.16 (b)) sont données dans le tableau 2.8. Leur position angulaire est mesurée avec les mêmes conventions que celles utilisées par ZENG *et al.* (2009).

$L =$		$FS$	$S1$	$RS$	$S2$
1	étude présente	11.28�	21.36�	—	—
	ZENG <i>et al.</i> (2009)	12.46�	22.09�	—	—
	erreur	1.18�	0.73�	—	—
0.505	étude présente	14.73�	70.31�	43.72�	-9.69�
	ZENG <i>et al.</i> (2009)	15.69�	65.21�	39.52�	-12.67�
	erreur	0.96�	5.10�	4.20�	2.98�

**TABLE 2.8** – Comparaison des positions angulaires des points remarquables : Points de stagnation ( $S1$ ,  $S2$  sur les figures 2.15 et 2.16) et de séparation ( $FS$ ,  $RS$  sur les figures 2.15 et 2.16) sur la sphère pour  $L = 1$  et  $L = 0.505$  et pour  $Re = 10$ .

On peut commencer par noter que les différences au niveau de la paroi pour les lignes d'iso-vorticité selon  $z$  sont en bonne partie dues au calcul de la vorticité qui est effectué avec un schéma centré, même pour les bords du domaine. Examinons le cas d'une sphère dont le centre est placé à un diamètre de la paroi, pour lequel  $L = 1$ . L'espace disponible entre la sphère et la paroi mesure donc  $0.5 d$  au minimum ce qui correspond à dix mailles fluides. Il reste donc des mailles entre la sphère et la paroi pour lesquelles  $\alpha = 0$ .

Dans cette configuration, l'ensemble des grandeurs observées est plutôt bien reproduit. L'erreur sur les coefficients hydrodynamiques reste faible. Ce sont des quantités intégrales, elles rendent donc compte de tout l'écoulement autour de la sphère. Toutefois, l'erreur est importante sur les bornes de vorticité, et est non négligeable pour celles en pression. Ces quantités sont locales et les extrema sont situés à la surface de la sphère. Le fait d'avoir une "mauvaise" résolution spatiale avec une méthode de type frontière immergée influence fortement les valeurs prises par ces grandeurs dans cette région. Mais la bonne correspondance des coefficients hydrodynamiques, ainsi que la position du changement de signe de la pression et des points particuliers des lignes de courant, montrent qu'on résout tout de même suffisamment bien l'écoulement pour bien capter les interactions solide-fluide (notons que ce sont les grandeurs intégrales qui sont échangées par JADIM et GraDyM).

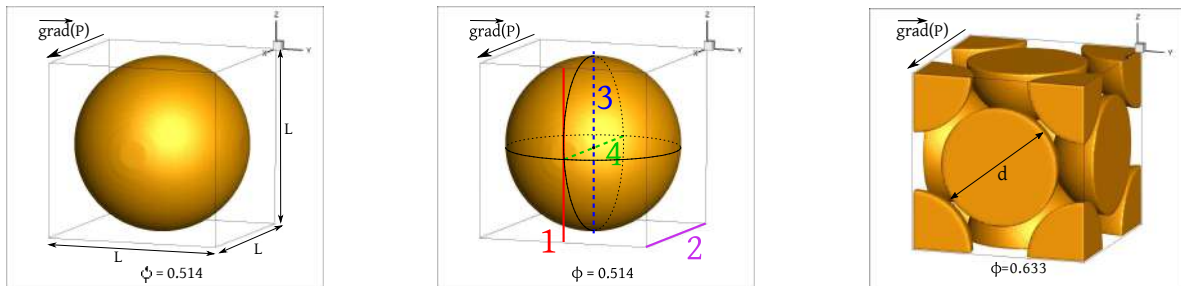
Penchons nous maintenant sur le cas où  $L = 0.505$ . L'espacement minimum entre la sphère et la paroi est alors 1% du rayon de la sphère. Cela correspond à un dixième de maille. Dans cette zone entre la sphère et la paroi,  $\alpha$  est non nul. On comprend bien que les grandeurs locales en seront

affectées. Et les grandeurs intégrales n'ont alors a priori pas de raison d'être justes. C'est bien ce que l'on observe pour les quantités locales : de très grands écarts avec la référence. Toutefois, les allures des champs sont bonnes comme on peut le voir sur les figures 2.15 et 2.16, ainsi qu'à l'aide des positions des points remarquables de l'écoulement (Tableau 2.8). De plus l'erreur sur les quantités intégrales reste faible. Et encore une fois ce sont les grandeurs échangées entre JADIM et GraDyM. La dynamique des grains dans le fluide sera donc tout de même bien décrite par GraDyM avec la méthode employée.

## 2.5.4 Écoulement dans un milieu poreux

On effectue un dernier cas test pour décrire le champ de vitesse fluide obtenu par cette méthode dans le cas le plus proche des configurations considérés dans la suite de l'étude, i.e. pour un empilement dense de particules. On réalise alors une série de simulation d'écoulements au travers de réseaux denses de particules sphériques et ce, en imposant un gradient de pression. Ces simulations sont comparées d'une part aux résultats de TENNETI *et al.* (2011), qui utilisent aussi une méthode de frontière immergée et pour quelques cas nous avons réalisé les mêmes simulations avec le logiciel OpenFOAM sur un maillage conforme (épousant la forme des particules) afin de pouvoir comparer localement les différents champs. On compare enfin la perméabilité équivalente obtenue à la formule de Kozeny-Carman (2.45). Les différents domaines de calcul sont présentés sur la figure 2.17 et correspondent aux volumes élémentaires de référence des milieux poreux périodiques ainsi constitués. Des conditions périodiques sont appliquées sur toutes les frontières du domaine. Ceci correspond à la simulation d'un réseau cubique simple infini pour différentes fractions volumique solides  $\phi$  et différents nombres de Reynolds  $Re$ , ainsi que quelques cas de réseaux cubiques faces centrées. La fraction  $\phi$  est définie respectivement sur les réseaux cubique simple (*cs*) et cubique faces centrées (*cfc*) par :

$$\phi_{cs} = \frac{\pi d_{cs}^3}{6L^3} \quad \text{et} \quad \phi_{cfc} = 4 \frac{\pi d_{cfc}^3}{6L^3}. \quad (2.43)$$



**FIGURE 2.17** – Représentation des domaines de calculs utilisés : réseau cubique simple (a) et réseau cubique à faces centrées (c). Les axes 1, 2, 3 et 4 sont représentés sur la figure (b).

On utilise un maillage régulier pour simuler ce problème. Le domaine est cubique de dimension  $L^3$ . Avec OpenFOAM, le maillage ne couvre que le domaine occupé par le fluide alors qu'avec la méthode IBM employée par JADIM, tout l'espace est maillé. Pour le reste, tous les paramètres physiques sont pris égaux lors des différentes simulations. Concrètement, on fixe un gradient de pression moyen dans la direction  $\vec{x}$ , on simule l'écoulement engendré jusqu'à ce qu'il soit stationnaire puis on mesure la vitesse moyenne  $\langle U \rangle$  de l'écoulement et la force  $F$  appliquée à la particule dans la direction  $\vec{x}$  pour tracer  $F^*(Re)$ , où  $F^*$  correspond à la force de traînée adimensionnée  $F^* = \frac{F_{drag}}{F_{Stokes}}$ , avec  $F_{Stokes} = 3\pi\eta_f d(1 - \phi) \langle U \rangle$ . Ici, le nombre de Reynolds moyen  $Re = \frac{\rho_f(1-\phi)\langle U \rangle d}{\eta_f}$  est calculé a posteriori. On fixe le pas de temps à  $\Delta t_f$  tel que le coefficient  $CFL$  vaille 0.25.

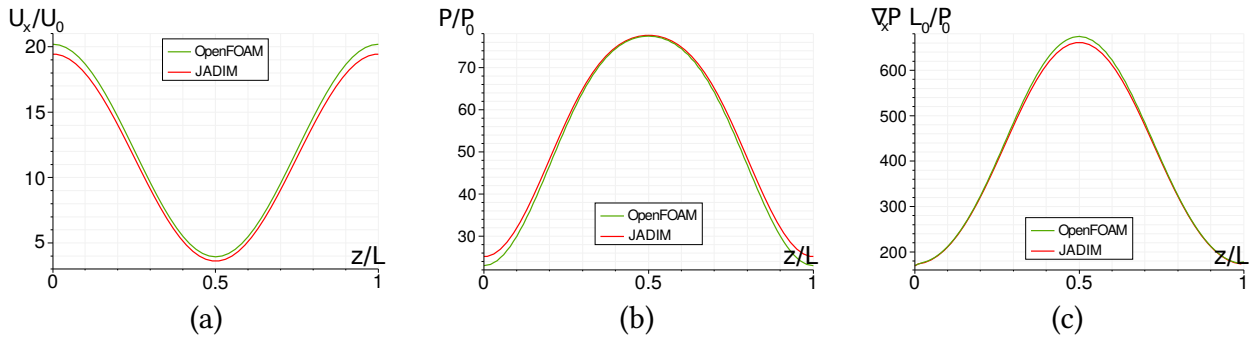
Dans un premier temps, on se place dans un réseau cubique simple de fraction solide  $\phi = 0.065$  pour un nombre de Reynolds de 9.1 et pour un maillage tel que  $d = 25\Delta x$ . On réalise ces simulations d'une part avec JADIM et d'autre part avec OpenFOAM. Cette fraction solide est très faible comparée aux fractions solides que l'on veut atteindre, mais cela permet une visualisation plus aisée des résultats. On utilisera les résultats obtenus avec OpenFOAM comme référence.

On compare les profils de vitesse longitudinale, de pression et de la composante longitudinale du gradient de pression le long de certains axes remarquables définis comme ceci :

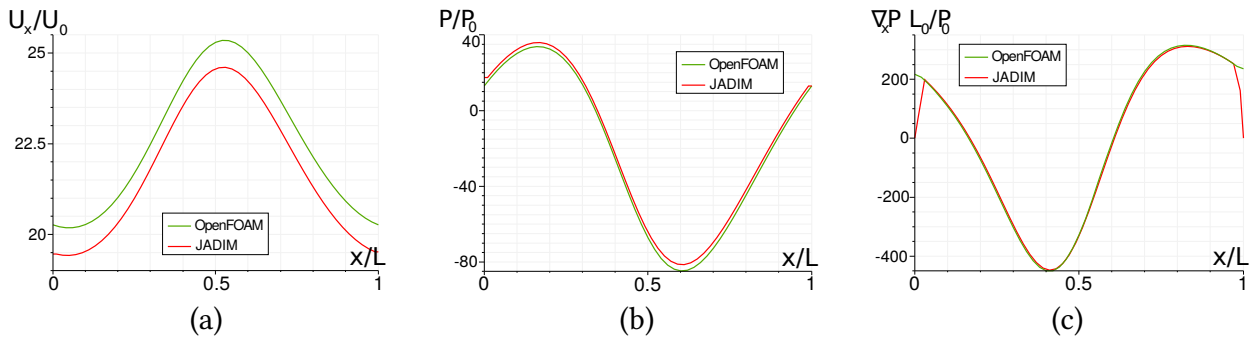
On appelle *Axe 1*, l'axe parallèle à  $z$  passant par  $(x = 0, y = \frac{L}{2}, z = 0)$ . L'*Axe 2* est parallèle à  $x$  et passe par  $(0, 0, 0)$ . Les *Axe 3* et *Axe 4* sont les axes respectivement parallèles à  $z$  et  $x$  passant par le centre de la sphère. Ces axes sont représentés sur la figure 2.17(b).

Pour le tracé des profils de pression (figures 2.18, 2.19, 2.21 et 2.21), on a déjà retranché la partie correspondant au forçage. On prend  $L_0 = L$  comme échelle de longueur,  $M_0 = \rho_f L^3$  comme échelle de masse et  $T_0 = \frac{\rho_f L^2}{\eta_f}$  comme échelle de temps. Ainsi, l'échelle de vitesse utilisée est  $U_0 = \frac{L_0}{T_0} = \frac{\eta_f}{\rho_f L}$ ,

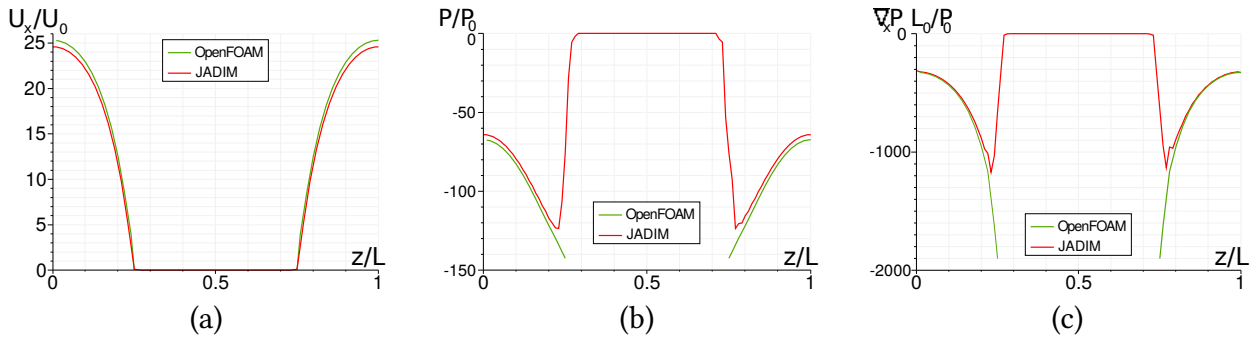
celle pour les forces est  $F_0 = \frac{M_0 U_0}{T_0} = \frac{\eta_f}{\rho_f}$  et l'échelle de pression est  $P_0 = \frac{F_0}{L_0^2} = \frac{\eta_f^2}{\rho_f L^2}$ .



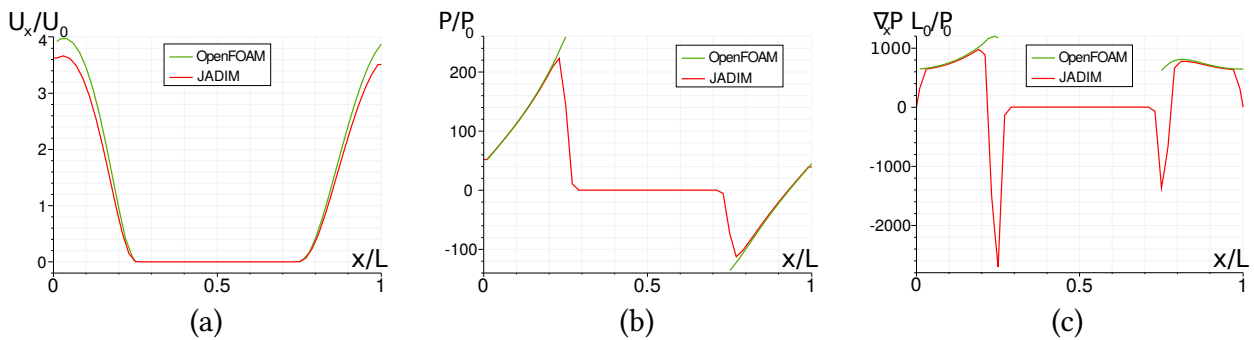
**FIGURE 2.18** – Profils de vitesse longitudinale (a), pression (b) et gradient de pression longitudinal (c) le long de l’Axe 1 pour  $\phi = 0.065$ ,  $Re = 9.1$  et avec  $d/\Delta x = 25$  dans un réseau cubique simple. On compare les vitesses, pression et gradient de pression obtenus via OpenFOAM (en vert) et via notre méthode IBM (en rouge).



**FIGURE 2.19** – Même légende que pour la figure 2.18 mais pour l’Axe 2



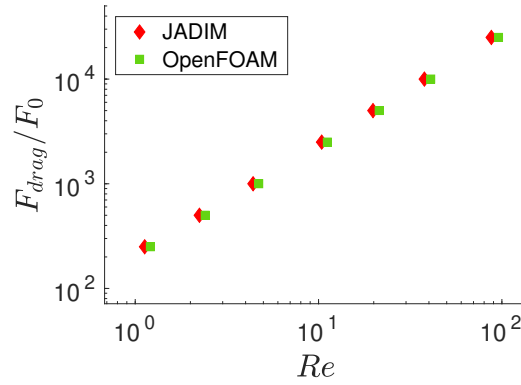
**FIGURE 2.20** – Même légende que pour la figure 2.18 mais pour l’Axe 3



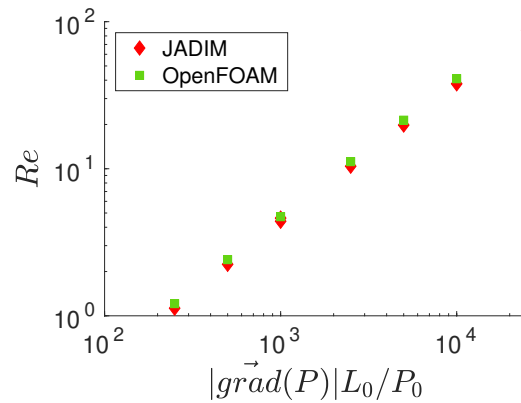
**FIGURE 2.21** – Même légende que pour la figure 2.18 mais pour l’Axe 4

On voit que les simulations réalisées avec JADIM sous-estiment généralement la vitesse avec un écart maximum de l’ordre de 5%, particulièrement sur les bords du domaine. C’est sans doute une

conséquence de l'épaississement artificiel de la frontière de la particule qui la rend "poreuse" de part et d'autre de la position théorique. Cette caractéristique de la méthode IBM engendre ici une perte de charge qui se fait ressentir dans tout l'écoulement. Pour les profils de pression, on observe un léger décalage, ce qui doit venir d'une référence en pression différente entre les simulations mais ne pose pas de problème. Mis à part cela, c'est dans l'épaisseur de la frontière immergée que les différences se font le plus sentir. Ces différences sont inhérentes à la méthode employée (épaisseur non nulle de la frontière, maillage non conforme, grandeurs définies (mais sans sens physique) aussi à l'intérieur de la particule). Le forçage par un gradient de pression extérieur est compensé à l'équilibre, la force de traînée est alors exactement celle attendue (voir les figures 2.22 et 2.23) mais la vitesse résultante de cet équilibre dissipation-forçage est un peu sous-estimée : la présente méthode surestime la dissipation.



**FIGURE 2.22** – Force de traînée obtenues via JADIM et OpenFOAM en fonction du nombre Reynolds pour un réseau cubique simple de fraction solide  $\phi = 0.408$  et avec un raffinement spatial  $d/\Delta x = 46$ .

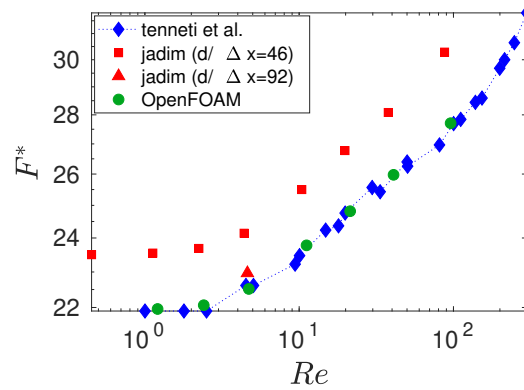


**FIGURE 2.23** – Nombre de Reynolds obtenus via JADIM et OpenFOAM en fonction du gradient de pression imposé dans un réseau cubique simple de fraction solide  $\phi = 0.408$  et avec un raffinement spatial  $d/\Delta x = 46$ .

Ces tests sont réalisées pour différentes valeurs de nombre de Reynolds. La force de traînée engendrée par l'écoulement sur la particule est tracée en fonction de  $Re$  pour les deux méthodes sur la figure 2.22. Comme attendu, la force de traînée à la même valeur pour les deux méthodes de simulation. On observe un léger décalage en nombre de Reynolds des points car la vitesse est sous-estimée par JADIM avec l'IBM. Pour un même gradient de pression imposé, le nombre de Reynolds obtenu est plus faible avec JADIM (d'environ 5%) qu'avec OpenFOAM.

Maintenant qu'on a identifié les limites de la méthode, on se focalise sur les caractéristiques macroscopiques des écoulements calculés par la méthode IBM. On s'intéresse d'abord au cas d'un réseau cubique simple avec une fraction solide  $\phi = 0.408$  pour des nombres de Reynolds compris entre 0.5

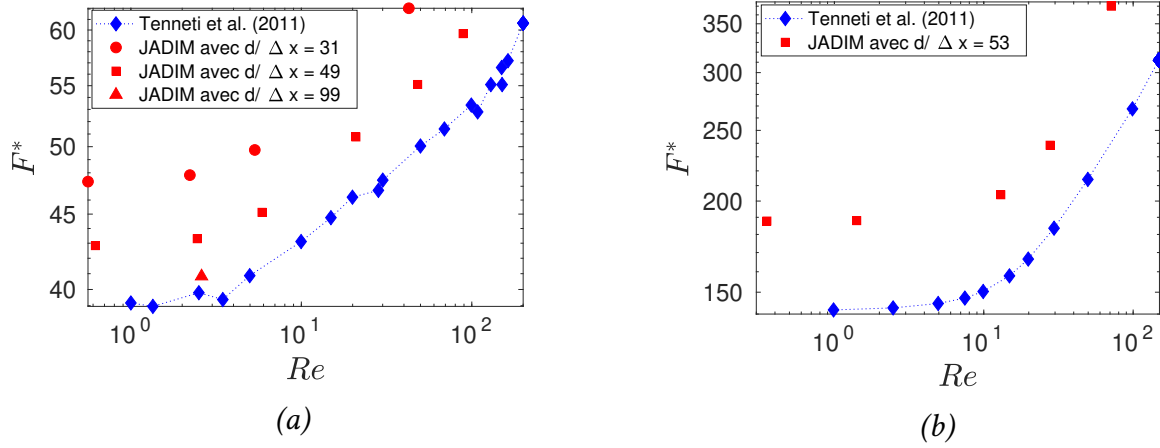
et 200. Cette série de simulation a été réalisée avec JADIM et OpenFOAM. La figure 2.24 présente l'évolution de la force de traînée adimensionnée  $F^* = \frac{F_{drag}}{F_{stokes}}$ .



**FIGURE 2.24** – Force de traînée adimensionnée en fonction du nombre de Reynolds pour un réseau cubique simple de fraction solide  $\phi = 0.408$  obtenue par TENNETI *et al.* (2011) et via JADIM et OpenFOAM.

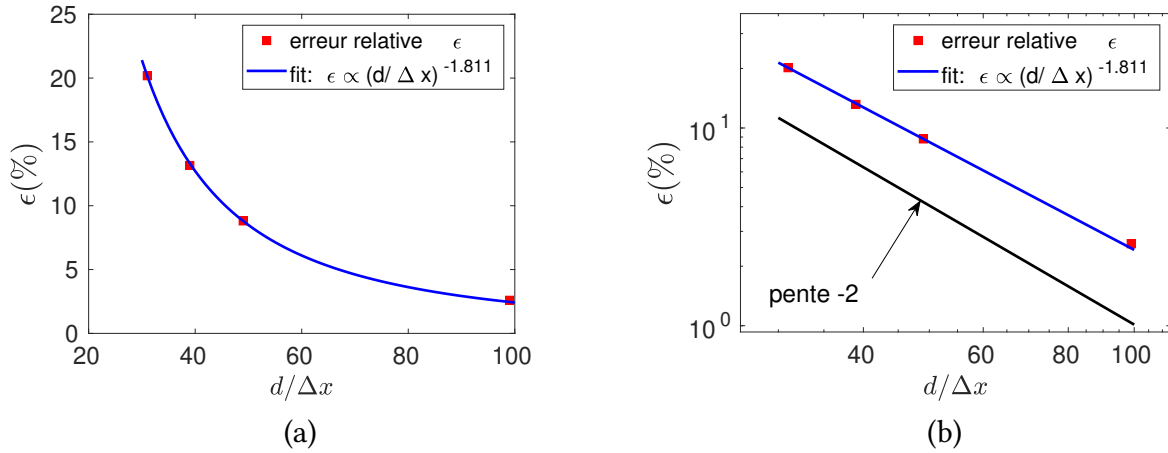
On peut voir sur la figure 2.24 que les résultats obtenus via OpenFOAM sont superposés avec ceux de TENNETI *et al.* (2011). Cela justifie l'utilisation des résultats d'OpenFOAM comme référence car on peut considérer les résultats de TENNETI *et al.* (2011) comme précis à la vue de la méthode employée (méthode PReIBM qui impose un peu mieux les conditions limites que la présente méthode IBM et avec une étude très complète de la convergence de leurs résultats). On a vu qu'avec JADIM, les efforts calculés sont bons mais qu'ils sous-estiment la vitesse du fluide. Ce biais engendre le décalage en Reynolds entre les simulations avec ces deux codes, mais c'est aussi ce qui cause le décalage sur  $F^*$  (de 7 à 10% ici) lorsque l'on adimensionne la traînée par une force proportionnelle à la vitesse moyenne du fluide. La variation de la traînée avec le nombre de Reynolds semble plutôt bien capturée quant à elle. L'utilisation d'un maillage plus fin (2 fois plus fin ici) permet d'obtenir un champ de vitesse plus proche des résultats de TENNETI *et al.* (2011), avec un écart d'environ 1.5% seulement (symbole ▲ sur la figure 2.24).

On augmente maintenant la fraction volumique solide  $\phi$  et on ne compare désormais les résultats qu'avec ceux de TENNETI *et al.* (2011). Pour un réseau cubique simple de compacité  $\phi = 0.514$ , on a réalisé cette étude avec deux raffinements distincts :  $d/\Delta x = 31$  et 49. Un cas pour  $d/\Delta x = 99$  a également été réalisé. Et pour le réseau cubique face centré de compacité  $\phi = 0.633$ , l'étude a été menée pour  $d/\Delta x = 53$ . Les résultats pour ces deux types de réseaux (cubique simple et cubique faces centrées) avec  $\phi \geq 0.5$  sont présentés sur la figure 2.25.



**FIGURE 2.25** – Force de traînée adimensionnée en fonction du nombre de Reynolds. (a) : pour un réseau cubique simple de fraction solide  $\phi = 0.514$  et (b) : pour un réseau cubique faces centrées avec  $\phi = 0.633$ .

Pour  $\phi = 0.514$  aussi, la variation de la traînée avec le nombre de Reynolds est bien captée par la méthode et ce quel que soit le raffinement spatial. Par contre, on obtient une erreur relative (quasi-indépendante du nombre de Reynolds) de l'ordre de 20% pour un raffinement de  $d/\Delta x = 31$  (toujours en parlant de l'erreur relative sur la force adimensionnée) et de l'ordre de 10% pour un raffinement de  $d/\Delta x = 49$ , et il faut atteindre  $d/\Delta x = 99$  pour passer sous les 5% d'erreur. La figure 2.26 montre la convergence en maillage de la méthode pour ce cas là.



**FIGURE 2.26** – Convergence en maillage : variation de l'erreur relative sur la traînée adimensionnée avec résolution spatiale pour  $|\text{grad}(P)| = 5 \times 10^{-5}$  et  $Re \simeq 2.5$ , pour  $\phi = 0.514$ , et pour un arrangement cubique simple en échelle linéaire (a) et en échelle logarithmique (b). Le résultat de la simulation avec OpenFOAM est pris comme référence.

On constate une convergence d'ordre presque 2 et qu'il faut environ 50 mailles par diamètre de grain pour passer sous les 10% d'erreur, pour ce cas là. Ces fortes erreurs sont à modérer par le fait que l'on adimensionne la force calculée par une force caractéristique qui est proportionnelle à la vitesse moyenne. Il y a donc plusieurs sources d'erreur qui interviennent simultanément dans le calcul de l'erreur. Si on traçait l'erreur relative pour la force non adimensionnée (ou adimensionnée à l'aide d'une force caractéristique ne dépendant pas de  $\langle U \rangle$ , par exemple  $F_P = L^3 \nabla P$ ), elle serait alors bien plus faible. Mais il est tout de même important de souligner les écarts de vitesses obtenus en plus de l'erreur sur la force hydrodynamique.

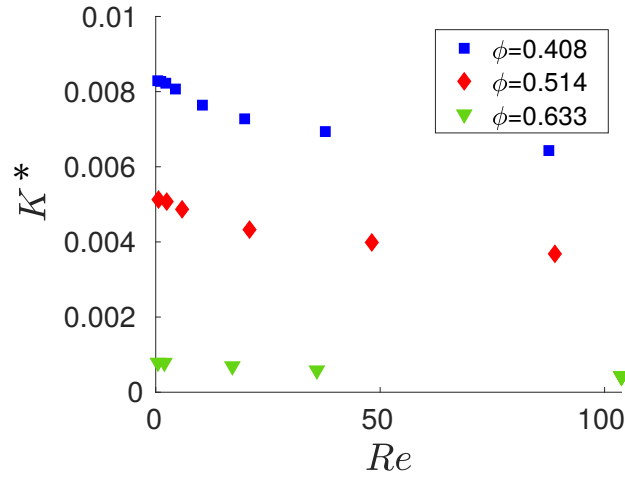
Sur la figure 2.25 (b), on se place dans un cas de réseau cubique faces centrées et on prend alors une fraction solide  $\phi = 0.633$ , qui est de l'ordre de grandeur des fractions solides dans un lit granulaire aléatoire dense et on prend un maillage tel que  $d/\Delta x = 53$ . La force de traînée est toujours sur-estimée par rapport aux résultats de TENNETI *et al.* (2011) mais la variation de cette force est encore une fois bien décrite par la présente méthode. On constate alors une augmentation de l'erreur relative entre les résultats de notre méthode et ceux de TENNETI *et al.* (2011) lorsque la fraction volumique augmente (on compare les cas pour lesquels  $d/\Delta x \simeq 50$ ). Ce phénomène est dû à l'épaisseur de la frontière IBM. Pour  $\phi = 0.633$ , les grains ne sont pas en contact. En effet, on a un diamètre de grain (position de  $\alpha = 0, 5$ ,  $\alpha$  étant défini par la relation (2.22)) de  $d = 0.6711L$  et pour le même empilement mais compact (grains en contact), on aurait  $d_{compact} = \sqrt{2}/2L = 0.707L$ . L'écart entre ces deux valeurs est de 5.1%. Mais la méthode IBM décrit la présence des particules à l'aide de la fonction  $\alpha$  qui est continue au niveau des surfaces des objets solides et rend donc diffuses les interfaces de ces objets. On a défini l'épaisseur  $\Delta$  de cette transition dans l'équation (2.22) et elle vaut typiquement  $\Delta = 1.5\Delta x$ . Ainsi, les grains ont un "diamètre externe" après lequel  $\alpha = 0$ . Ici, la valeur de ce diamètre externe est de  $d_{ext} = d(1 + 2 \times 1.5/53) = 1.0566d = 0.709L > d_{compact}$ . Il y a donc recouvrement des fonctions  $\alpha$  définies pour chaque particule dans la zone les séparant (sans qu'il n'y ait de contact). Le fluide doit alors passer dans des pores qui sont "obstrués" par l'étalement des interfaces. Cet étalement des frontières immergées explique donc la sur-dissipation comme mentionné précédemment, mais il explique également le fait que cette erreur augmente avec la compacité. En effet, plus les pores sont fins, plus l'étalement des frontières correspond à une fraction élevée du volume de ces pores car  $\Delta \propto d$  (ici, on compare des cas avec le même raffinement du maillage  $d/\Delta x \simeq 50$ ). Cela explique aussi en partie pourquoi l'erreur diminue avec le raffinement du maillage : le volume couvert par la zone interfaciale ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) est d'autant plus faible que  $\Delta x$  est petit. Il y a aussi un effet du maillage indépendamment de l'épaisseur de la frontière IBM, ce point a été étudié sur la cas-test de la sédimentation d'une sphère (section 2.5.2).

Ces réseaux périodiques de sphères sont assimilables à des milieux poreux périodiques. On peut alors comparer ces mêmes résultats avec d'autres travaux provenant de l'étude des milieux poreux. On commence alors par calculer la perméabilité apparente de notre milieu poreux ainsi constitué,  $K = \frac{\langle U \rangle}{-\nabla P} = f(Re)$ . En première approximation, pour de faibles nombres de Reynolds, on considère un écoulement de Darcy et alors on a  $\langle U \rangle = -K_D \nabla P$ , avec  $K_D$  la perméabilité de Darcy du milieu poreux. En augmentant le nombre de Reynolds, les effets inertiels ne sont plus négligeables et on trouve alors dans la littérature la relation empirique suivante (BOGDAN et MEI (2010)) :

$$-K_D \nabla P = \langle U \rangle + b \langle U \rangle^n, \quad (2.44)$$

où  $b$  et  $n$  sont des constantes déterminées expérimentalement. Forcheimer (1901), par exemple, trouve  $1.6 < n < 2$ ; mais la valeur 2 reste la plus populaire dans la littérature. On adimensionne  $K$  par  $L^2/\eta_f$  et on trace  $K^* = \frac{\eta_f K}{L^2}$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$  sur la figure 2.27.





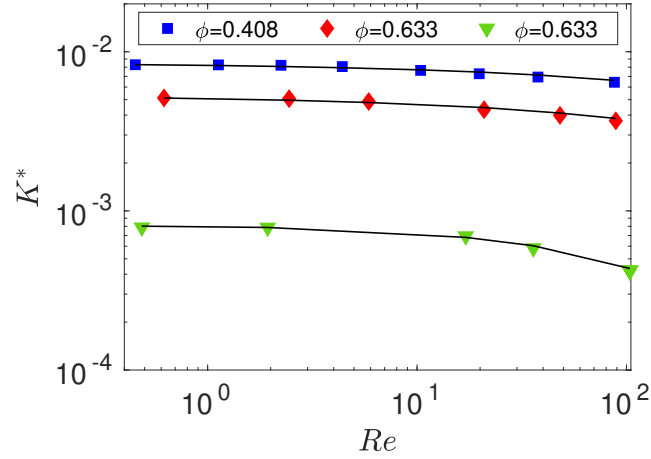
**FIGURE 2.27** – Perméabilité apparente  $K^*$  du milieu poreux en fonction du nombre de Reynolds pour  $\phi = 0.408$  et  $0.514$  pour des réseaux cubiques simples et  $\phi = 0.633$  pour un réseau cubique faces centrées ( $d/\Delta x \simeq 50$ ).  $K$  est adimensionné par  $L^2/\eta_f$ .

$K_D$  est obtenu pour chaque  $\phi$  et chaque réseau pour  $Re \rightarrow 0$ . Un ajustement de (2.44) sur les résultats de la figure 2.27 nous permettant d'obtenir  $b$  et  $n$  pour chaque  $\phi$  et chaque réseau. Le tableau 2.9 présente les valeurs obtenues.

$\phi$ (réseau)	$\theta = 1 - \phi$	$K_D^*$	$n$	$b$
0.408 (SC)	0.592	$8.45 \times 10^{-3}$	1.484	2.15
0.514 (SC)	0.486	$5.30 \times 10^{-3}$	1.515	3.12
0.633 (FCC)	0.367	$7.95 \times 10^{-4}$	2.354	117

**TABLE 2.9** – Perméabilité de différents milieux poreux ainsi que les coefficients décrivant la dépendance au nombre de Reynolds de la perméabilité apparente (équation (2.44)).

Les valeurs de  $b$  et  $n$ , bien que ne pouvant pas être comparées à d'autres, sont cohérentes avec les valeurs trouvées dans la littérature ; on trouve des puissances entre 1.5 et 2.3 qui permettent un bon ajustement des données comme on peut le voir sur la figure 2.28. Sur cette figure sont tracées les valeurs de perméabilités obtenues ainsi que les ajustements de ces données par la relation (2.44).



**FIGURE 2.28** – Perméabilité apparente en fonction du nombre de Reynolds pour différentes porosités et les ajustements de ces données par l'équation (2.44) (avec les coefficients  $b$  et  $n$  donnés dans le tableau 2.9).

On peut aussi comparer les perméabilités obtenues à la formule de Kozeny-Carman (CARMAN (1939)). Elle est valable pour des nombres de Reynolds tendant vers 0 et s'exprime généralement grâce à la porosité  $\theta$ , où  $\theta = 1 - \phi$  avec  $\phi$  la fraction solide du milieu considéré, de la façon suivante :

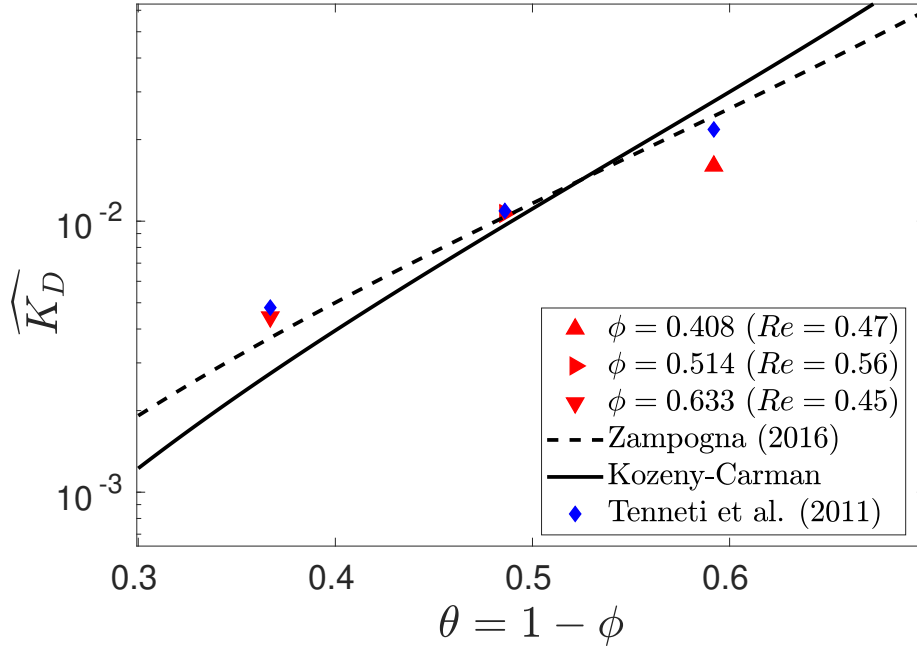
$$K_D = \frac{\Lambda^2}{5\eta_f} \frac{\theta^3}{(1 - \theta)^2} = \frac{\Lambda^2}{5\eta_f} \frac{(1 - \phi)^3}{\phi^2}, \quad (2.45)$$

où  $\Lambda$  est le rapport *Volume/Surface* des grains. Comme on utilise des sphères, on a  $\Lambda = R/3$ . On obtient alors en adimensionnant  $K_D$  à l'aide  $R$  (et non plus  $L$ ) :

$$\widehat{K}_D = \frac{\eta_f K_D}{R^2} = \frac{1}{45} \frac{\theta^3}{(1 - \theta)^2}. \quad (2.46)$$

C'est ce que l'on a tracé sur la figure 2.29 afin d'y comparer nos valeurs et celles de TENNETI *et al.* (2011). On a également tracé une version "corrigée" de cette dernière. Cette correction vient de ZAMPOGNA et BOTTARO (2016) et consiste en une modification des exposants dans la relation de Kozeny-Carman (2.45) de la façon suivante, de manière à mieux représenter leurs résultats numériques :

$$\widehat{K}_{D,corr} = \frac{1}{45} \frac{\theta^{\frac{5}{2}}}{(1 - \theta)^{\frac{47}{30}}}. \quad (2.47)$$



**FIGURE 2.29** – Comparaison avec la relation de Kozeny-Carman : perméabilités apparentes normalisées (par  $R^2/\eta_f$ ) du milieu poreux en fonction de la porosité; avec  $d/\Delta x \simeq 50$ . Ces valeurs sont obtenues avec  $Re \simeq 0.5$

On peut voir que l'ordre de grandeur de la perméabilité est le bon, sa variation avec la porosité semble également raisonnablement bien décrite, notamment si on prend l'expression corrigée de la perméabilité (2.47) comme référence. Finalement c'est pour la plus petite valeur de fraction solide,  $\phi = 0.408$  ( $\theta = 0.592$ ), que l'erreur est la plus grande. Pour ce cas là, la perméabilité est sous estimée ce qui correspond aux observations faites précédemment d'une force de traînée surestimée. On a vu que la perméabilité diminuait avec le nombre de Reynolds, une partie de l'erreur commise peut alors être attribuée au fait que l'on soit à  $Re = 0.45 \neq 0$  pour effectuer cette mesure.

Pour conclure sur les performances de la méthode IBM. Sur ce cas-test, la méthode IBM surestime légèrement la perméabilité pour les fortes concentrations de solide et la sous-estime pour les faibles. Un grand nombre de mailles par diamètre de grain ( $\sim 50$ ) semble également nécessaire afin d'obtenir des erreurs inférieures à 10%. Mais même lorsque cette condition n'est pas remplie, les ordres de grandeurs sont bons et les dépendances avec les différents paramètres ( $Re$ ,  $\phi$ ) sont bien capturées, dans la gamme de nombre de Reynolds testé ici; c'est-à-dire entre  $10^{-1}$  et  $10^2$ .

On a vu dans cette partie que l'erreur commise par la présente méthode dépendait de beaucoup de paramètres (du pas de temps  $\Delta t_f$ , du nombre de mailles par diamètre de grain  $d/\Delta x$ , du choix de la définition de la vitesse  $\mathbf{u}_D$ , du nombre  $N_L$  de passage par la sous-boucle de forçage, de l'épaisseur  $\Delta$  de la frontière IBM) et on a déterminé la valeur que nous utiliserons par la suite pour la plus part de ces paramètres. Pour rappel, on a fixé  $N_L = 2$ ,  $\Delta = 1.3\Delta x$  et  $\mathbf{u}_D$  est donnée par (2.25). Pour des raisons de temps de calcul, on utilisera généralement un maillage dont le pas vaut  $\Delta x = d/10$  et un pas de temps  $\Delta t_f$  assez grand (typiquement tel que le coefficient  $C_{CFL} \simeq 1$  au niveau de la condition limite du haut du domaine, ce qui correspond dans le pire des cas à  $C_{CFL} \simeq 0.4$  au niveau des grains les plus rapides). On a vérifié que ce jeu de paramètres permettait une bonne résolution des phénomènes étudiés. L'erreur commise est parfois importante à cause d'une sur-dissipation au niveau des frontières IBM mais les dépendances des résultats avec les différents paramètres physiques sont bien capturés. De plus, c'est principalement les erreurs locales qui ont tendance à être grandes mais si on considère des quantités intégrales, les erreurs sont bien plus faibles.

# Chapitre 3

## Set-up et considérations préliminaires

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Préparation des simulations . . . . .</b>	<b>52</b>
3.1.1	Sédimentation d'un lit granulaire sec . . . . .	52
3.1.2	Initialisation de l'écoulement du fluide . . . . .	53
3.1.3	Simulation d'un lit de grains immergé dans un écoulement cisaillé . . . . .	53
<b>3.2</b>	<b>Évolution temporelle d'un lit de grains cisaillé . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>3.3</b>	<b>Prise de moyennes temporelles . . . . .</b>	<b>63</b>
<b>3.4</b>	<b>Convergences en domaine et en maillage . . . . .</b>	<b>65</b>

---

Maintenant qu'on a vérifié les capacités de la méthode de résolution numérique sur une batterie de cas-tests (chapitre 2), on considère le cas d'un lit de grains immergé et cisailé par le fluide environnant. On considère alors un domaine de taille  $L_x \times L_y \times L_z$  régulièrement maillé de façon cartésienne et on appelle  $\Delta x$  le pas d'espace de ce maillage ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ ). On choisit de ne considérer que des domaines vérifiant  $L_x = L_z$  ici. L'objectif de ce chapitre est de vérifier la convergence des résultats avec le domaine de simulation ainsi qu'avec le pas d'espace du maillage. On souhaite utiliser une taille de domaine  $L_x$  la plus faible possible et avec un pas du maillage  $\Delta x$  le plus grand possible afin de réduire le temps de calcul et la mémoire nécessaire pour effectuer les simulations. On souhaite également vérifier l'impact du choix de l'épaisseur des frontières immergées  $\Delta$  (équation (2.22)) sur les écoulements granulaires obtenus. On abordera aussi la question de la prise de moyennes temporelles (dans le régime permanent).

Dans cette optique, on commence par décrire la préparation des simulations réalisées, puis on étudie l'évolution temporelle d'un lit de grains soumis à un écoulement cisailé. On considère ensuite uniquement le régime permanent afin d'étudier la convergence statistique lors des prises de moyennes temporelles. On étudiera finalement la convergence des données avec le raffinement du maillage et la taille du domaine.

Le domaine de simulation est représenté sur la figure 3.1.

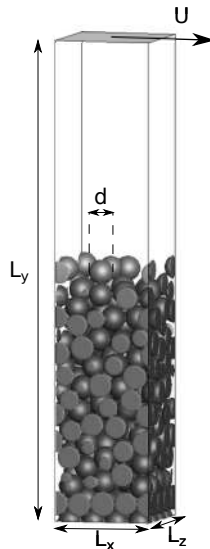


FIGURE 3.1 – Illustration du domaine de simulation.

## 3.1 Préparation des simulations

Dans cette partie, on explicite la procédure suivie pour préparer et réaliser les simulations effectuées lors de cette étude.

### 3.1.1 Sédimentation d'un lit granulaire sec

On prépare d'abord le lit de grains par sédimentation, pour cela on utilise le logiciel GraDyM seul. On considère un domaine en forme de parallélépipède rectangle de taille  $L_x \times L_y \times L_z$ . Des demies sphères sont fixées au fond du domaine (en  $y = 0$ ) pour le rendre rugueux et ainsi éviter que l'ensemble du lit de grains glisse en bloc sur le fond lisse du domaine de simulation. Ces rugosités sont visibles sur la figure 3.1. Des conditions limites périodiques sont utilisés pour les surfaces latérales.

On fixe l'intensité de la pesanteur à  $g_{init} = g \frac{\Delta\rho}{\rho_p}$ , ainsi le poids ressenti par les grains est  $V_p \rho_p g_{init} = V_p \Delta\rho g$ ; c'est-à-dire le même que lorsqu'on aura ajouté le fluide interstitiel et que le poids apparent des grains sera leur poids moins la poussée d'Archimède. Cet accord des poids apparents au cours de la préparation des simulations permet d'éviter de faire "sauter" le lit de grains au démarrage des simulations. On rappelle que les grains sont modélisés comme des sphères molles possédant une raideur. Si on n'adaptait pas l'intensité de la pesanteur, les "ressorts" que constituent les grains se relâcheraient partiellement au moment d'introduire le fluide interstitiel (et donc la poussée d'Archimède). Ce relâchement étant instantané (car  $t_{col} < \Delta t_f$ ), le lit de grains effectuerait un "saut" dès le premier pas de temps.

Les  $N_p$  particules sont alors disposées de façon aléatoire dans le domaine et sédimentent sous l'effet de leur poids.  $N_p$  est choisi de sorte que le lit de grains fasse environs  $10d$  de haut. Pour un domaine de simulation tel que  $L_x/d \times L_z/d = 4 \times 4$ , cela correspond à 170 particules (+16 demies pour les rugosités au fond).

On peut noter qu'elles ne font pas toutes la même taille, on introduit une légère polydispersité de leur diamètre ( $\pm 5\%$ ) afin d'éviter que le lit de grains ne cristallise (comme la première couche de grains en partant du fond rugueux, sur la figure 3.1 par exemple). Une fois le lit de grains formé, on attend encore un peu pour que l'énergie cinétique totale du système atteigne son minimum. La première partie de la préparation de l'état initial des simulation est alors terminée.

### 3.1.2 Initialisation de l'écoulement du fluide

Une fois le lit de grains formé par sédimentation, on fige les particules. On leur interdit tout mouvement de translation et de rotation. On considère alors un domaine maillé de façon cartésienne et régulière avec un pas d'espace  $\Delta x = d/10$ . On initialise ensuite l'écoulement cisailé du fluide interstitiel avec le logiciel JADIM. Pour cela, on part d'un champ de vitesse qui varie linéairement avec la hauteur, qui prend la même valeur  $U$  que la condition limite au sommet du domaine et qui s'annule à peu près à la surface du lit de grains (qui est en fait un milieu poreux ici, puisqu'on interdit tout mouvement aux particules). Les conditions limites sur les parois latérales sont périodiques pour le fluide aussi. On fait ensuite tourner cette simulation pendant 500 pas de temps afin d'obtenir un champ de vitesse du fluide stationnaire (variations locales de l'ordre  $10^{-3}\dot{\gamma}d$  maximum entre deux pas de temps successifs). Les vitesses négatives que l'on impose à l'intérieur du lit granulaire à l'instant initial sont rapidement dissipées et on obtient alors un champ de vitesse quasiment nul dans le lit de grains qui se raccorde au niveau de la surface du lit de grains avec l'écoulement cisailé dans la partie supérieure du domaine. Cet état du système sert alors de condition initiale pour la simulation.

### 3.1.3 Simulation d'un lit de grains immergé dans un écoulement cisailé

On commence maintenant à proprement parler la simulation du lit granulaire mis en mouvement par l'écoulement cisailé du fluide. Pour cela, on libère les grains à  $t = 0$ . Les contraintes entre grains sont prises égales à celles à la fin de la sédimentation "sèche". Le champ de vitesse fluide est initialisé à l'aide de la solution finale obtenue en présence du lit de grains figés (*i.e.* du milieu poreux). On fixe le pas de temps tel que le coefficient de Courant–Friedrichs–Lewy  $C_{CFL} = 1$  au sommet du domaine de simulation (*i.e.* là où la vitesse du fluide est la plus grande). On a alors  $\Delta t_f = \frac{\Delta x}{U}$ , avec  $U = 10d \times \dot{\gamma}$ .

Comme les grains sont libérés, ils commencent à se déplacer et permettent alors à la vitesse fluide de pénétrer plus profondément dans le lit granulaire : c'est le début du régime transitoire. Le comportement temporel de ce système est étudié dans la section 3.2.

### 3.2 Évolution temporelle d'un lit de grains cisailé

On s'intéresse maintenant au comportement temporel d'un lit de grains lorsqu'il est soumis à un écoulement de cisaillement. Pour ce faire, dans cette partie, on va décrire l'évolution temporelle d'une simulation en particulier, celle pour un nombre de Reynolds particulière  $Re_p = 1$ , un nombre de Shields  $\theta = 0.67$  et un rapport de densités  $r = 2.5$  (les définitions et interprétations de ces nombres sans dimensions sont données dans la section 4.1). Commençons par l'évolution temporelle du débit volumique de grains. En effet, cette grandeur tient à la fois compte de la vitesse des particules et de leur répartition. Par abus de langage, on omettra parfois l'adjectif volumique. C'est le volume de solide qui traverse une surface normale à l'écoulement par unité de temps et par unité de largeur du système :

$$q(t) = \frac{1}{L_z} \int_{S(x_0)} \phi \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{e}_x dy dz, \quad (3.1)$$

où  $x_0$  est la position du plan sur lequel on s'appuie pour calculer le débit granulaire. Le domaine de simulation est un tube de courant pour le flux de grains, le débit granulaire est donc indépendant de  $x_0$ . On peut alors moyenner les débits (tous égaux en moyenne) sur toutes les valeurs de  $x_0$ . On obtient alors l'expression suivante du débit de grains :

$$q(t) = \frac{1}{L_x L_z} \int_{V_{simu}} \phi u_p dV. \quad (3.2)$$

Ce débit peut ensuite se calculer à partir des données lagrangiennes (provenant du solveur GraDyM, voir chapitre 2) :

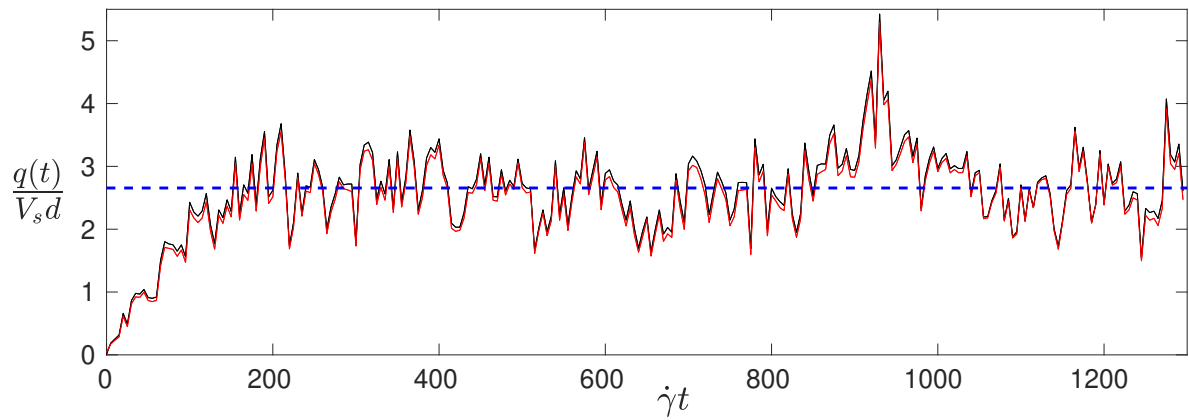
$$q(t) = \frac{1}{L_x L_z} \sum_{p=1}^{N_p} V_p u_p(t), \quad (3.3)$$

où  $L_x$  et  $L_z$  sont la longueur et la largeur du domaine et  $V_p$  est le volume de la particule  $p$ . On peut également calculer le débit à partir des données eulériennes (provenant du solveur Jadim, voir chapitre 2) grâce à la fraction volumique solide  $\alpha$  :

$$q_\alpha(t) = \frac{1}{L_x L_z} \sum_{(i,j,k)} \alpha(i,j,k,t) u(i,j,k,t) dv(i,j,k), \quad (3.4)$$

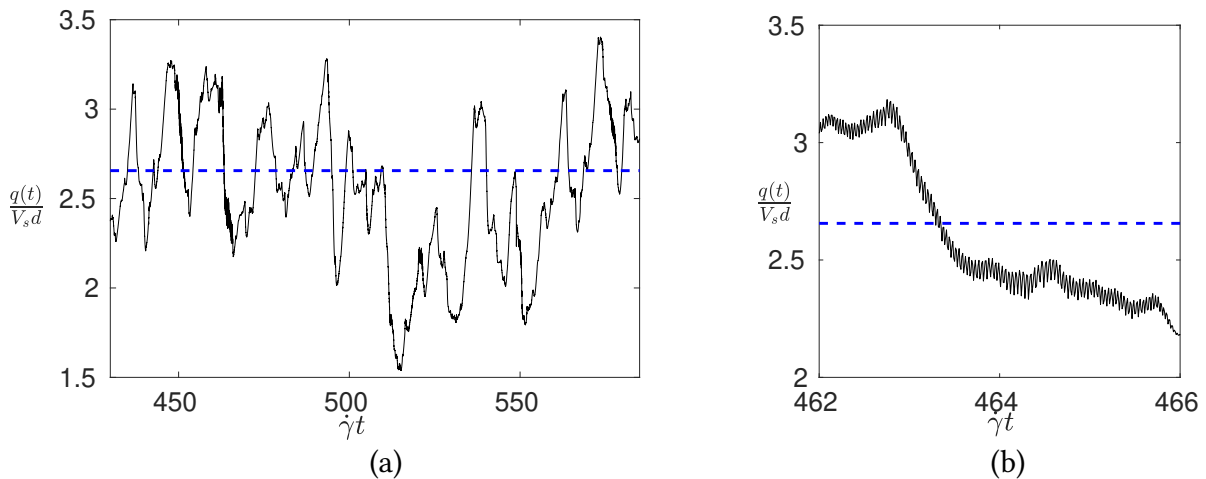
où le triplet  $(i, j, k)$  représente les coordonnées de la cellule de calcul considérée. La somme s'effectue sur tout le domaine, *i.e.* pour  $i \in [1; N_x]$ ,  $j \in [1; N_y]$  et  $k \in [1; N_z]$ . La figure 3.2 montre l'évolution temporelle du débit de grains pour les deux méthodes de calcul. Les deux formulations semblent équivalentes mais en fait elles diffèrent légèrement à cause de la zone interfaciale (où  $0 < \alpha < 1$ , voir chapitre 2). En effet, si on se place sous le seuil de mise en mouvement, le débit de grains  $q$  est nul mais ce n'est pas tout à fait le cas pour  $q_\alpha$  car le fluide circule encore un peu dans la zone interfaciale et est pris en compte dans l'intégrale (3.4). Cela peut poser des problèmes de précision, surtout proche du seuil de mise en mouvement. De façon générale, on aura  $q_\alpha > q$ , on utilisera donc la formulation lagrangienne du débit granulaire (équation (3.3)) dans la suite de cette étude. Dans le cas de la figure 3.2, la différence relative entre les deux méthodes de calcul du débit de grains n'excède jamais 6.5% ce qui correspond à un écart de  $0.16 V_s d$  sur le débit.





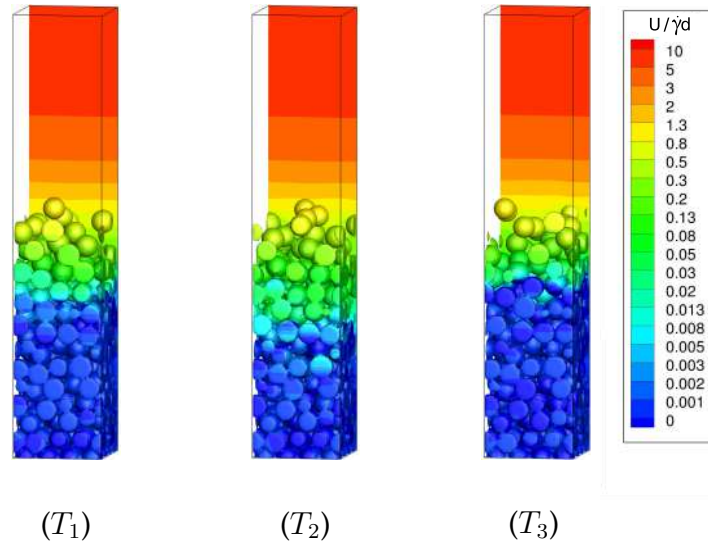
**FIGURE 3.2** – Évolution temporelle du débit granulaire pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . (–) :  $q_\alpha/V_s d$  via sa formulation eulérienne (équation (3.4)); (–) :  $q/V_s d$  via sa formulation lagrangienne (équation (3.3)). (–) : débit granulaire saturé. Seul un point tous les  $5\dot{\gamma}t$  est représenté ici. Le débit est adimensionné par le débit linéique  $V_s d$ , construit à partir de la vitesse de Stokes  $V_s = \frac{(\rho_p - \rho_f)gd^2}{18\eta_f}$ .

La figure 3.2 montre que, dans un premier temps, le débit augmente après quoi un débit que l'on qualifera de stationnaire est atteint. Le régime transitoire dure environ  $200\dot{\gamma}t$  ici. Cette augmentation est à attribuer à une augmentation de vitesse des particules conjointement à une augmentation du nombre de grains en mouvement. C'est dans le régime stationnaire que l'on calcule les grandeurs moyennes, telles que le débit granulaire saturé, la densité surfacique de grains mobiles, la vitesse moyenne des particules, la hauteur du lit par exemple (le détail de la procédure de prise de moyenne temporelle est décrite dans la section 3.3). Même dans le régime stationnaire, des fluctuations du débit persistent sur plusieurs échelles de temps distinctes. Ces échelles de temps sont mises en évidence sur les figures 3.2 et 3.3.



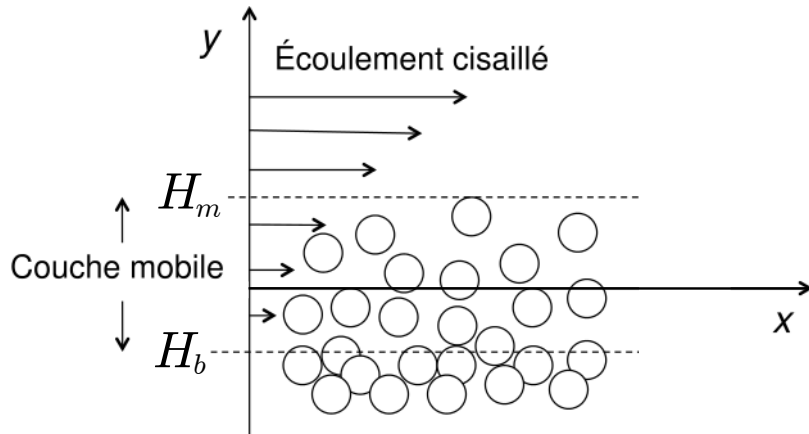
**FIGURE 3.3** – Débit granulaire en fonction du temps pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . (a) : pour  $\dot{\gamma}t \in [430; 585]$  et (b) : pour  $\dot{\gamma}t \in [462; 466]$ . Ces zooms consécutifs de la figure 3.3 permettent de mettre en évidence les différentes échelles temporelles de variations du débit de grains. (–) : débit granulaire saturé.

On commence par s'intéresser à l'augmentation brutale et de courte durée du débit visible sur la figure 3.2 pour  $\dot{\gamma}t \sim 950$ ; ce phénomène semble isolé. La figure 3.4 montre la vitesse au sein du lit de grains pour trois instants situés juste avant ( $T_1 : \dot{\gamma}t = 880$ ), pendant ( $T_2 : \dot{\gamma}t = 940$ ) et après ( $T_3 : \dot{\gamma}t = 990$ ) cet événement. On voit que la vitesse augmente en profondeur sans trop varier à sa surface.

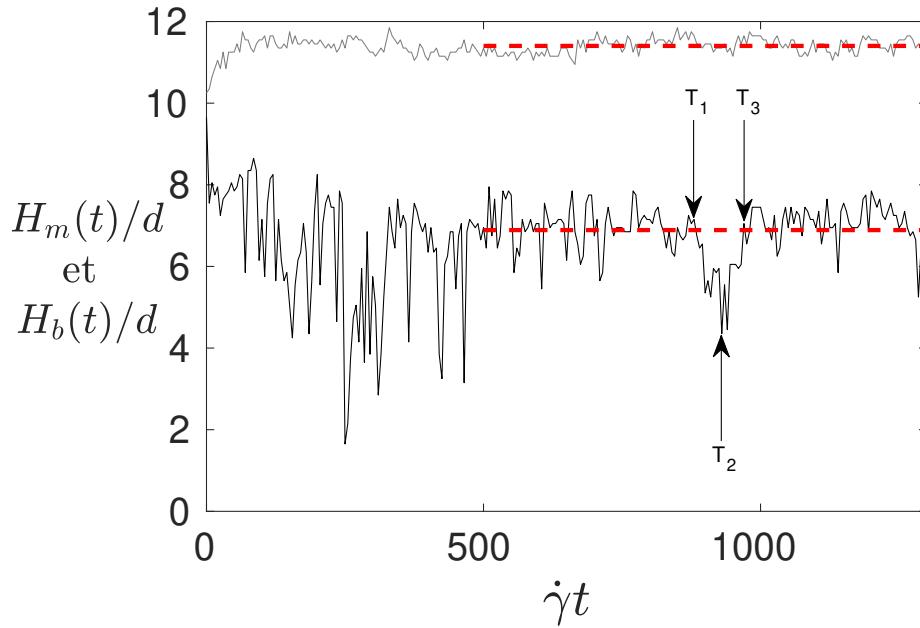


**FIGURE 3.4** – Lit granulaire pour  $(T_1) : \dot{\gamma}t = 880$ ,  $(T_2) : \dot{\gamma}t = 940$  et  $(T_3) : \dot{\gamma}t = 990$  (voir les figures 3.3 et 3.6). La couleur représente la vitesse du fluide dans le sens de l'écoulement (en échelle logarithmique) et les grains sont tracés en prenant les isocontours  $\alpha(\mathbf{x}) = 0.5$ . Ici, la vitesse de Stokes est  $V_s = 8.33 \times 10^{-2} \dot{\gamma}d$  et donc la vitesse seuil pour définir la couche mobile est  $V_{seuil} = 0.02V_s = 1.66 \times 10^{-3} \dot{\gamma}d$ .

Pour mieux rendre compte de ce phénomène, on souhaite définir les altitudes du haut et du bas de la couche mobile dans ce cas non idéalisé (voir la figure 3.5). On définit alors, de façon instantanée  $H_m(t)$  comme étant le sommet du grain le plus haut à l'instant  $t$ . On note  $H_m$  la moyenne temporelle de cette hauteur (prise dans le régime stationnaire). Pour la position du bas de la couche mobile, on utilise un seuil sur la vitesse des particules. On choisit d'utiliser le même seuil que BOUTELOUP (2017), soit 2% de la vitesse de Stokes.  $H_b(t)$  est alors l'altitude à laquelle  $u_p(H_b) = 0.02V_s$  à l'instant  $t$  et on note  $H_b$  sa moyenne temporelle (dans le régime stationnaire). Ces deux hauteurs sont tracées en fonction du temps sur la figure 3.6. Les instants  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  sont également représentés.

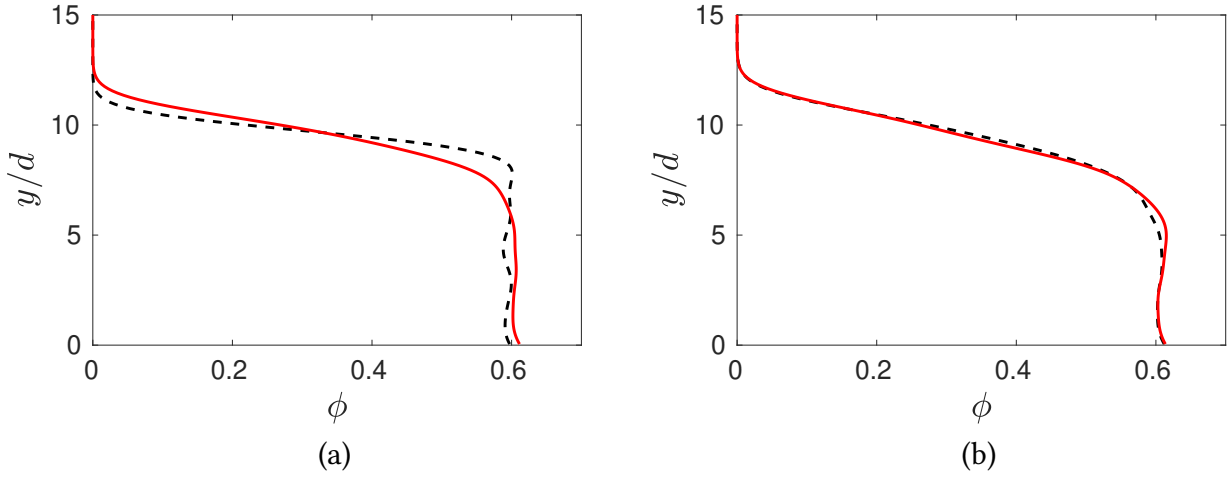


**FIGURE 3.5** – Schéma de la couche de grains mobiles et définition des hauteurs  $H_m$  et  $H_b$



**FIGURE 3.6** – Évolution temporelle du haut  $H_m(t)$  en gris (–) et du bas  $H_b(t)$  en noir (–) de la couche de grains mobiles. Les valeurs moyennes de  $H_m(t)$  et  $H_b(t)$  sont également représentées dans le régime stationnaire. Le régime transitoire est visible sur  $H_b(t)$  pour  $\dot{\gamma}t < 500$  et ainsi que le réarrangement en profondeur du lit de grains pour  $\dot{\gamma}t \simeq 950$ . Les repères  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  correspondent aux instants représentés sur la figure 3.4.

La figure 3.6 montre que  $H_m(t)$  augmente rapidement en début de simulation puis se stabilise après environ  $100\dot{\gamma}t$  autour de sa valeur stationnaire  $H_m = 11.4d$ . Le comportement de  $H_b(t)$  est très différent. La position du bas de la couche mobile fluctue fortement (entre  $2-3d$  et  $8-9d$ ) sur de courtes durées ( $\sim 10\dot{\gamma}t$ ) pendant  $500\dot{\gamma}t$  avant de se stabiliser autour de sa valeur stationnaire. Et même une fois le régime transitoire passé, une autre diminution brutale et de courte durée de  $H_b(t)$  a lieu pour  $\dot{\gamma}t \simeq 950$ . Cet événement correspond donc à la brusque augmentation du débit de grains de la figure 3.2. La variation du débit est donc due à un mouvement de grains situés en profondeur dans le lit. C'est donc le nombre de grains en mouvement qui augmente lors de cet événement et pas particulièrement la vitesse de ceux déjà en mouvement. Il s'agit d'un réarrangement des grains en profondeur dans le lit. La figure 3.6 montre qu'un nombre important de ces réarrangements ont lieu pendant les 500 premiers  $\dot{\gamma}t$  de la simulation or le lit de grains a été préparé par sédimentation et est donc dans une configuration lâche à  $t = 0$ . Un lit préparé de façon lâche aura tendance à se compacter alors qu'un lit préparé de façon dense aura plutôt tendance à se décompacter (MODARESSI *et al.* (1999)). Les réorganisations en profondeurs sont alors le signe d'une compaction du lit de grains.



**FIGURE 3.7** – Profils de fraction volumique solide  $\phi$ . (a) : à  $\dot{\gamma}t = 0$  en pointillés noir (- -) et à  $\dot{\gamma}t = 500$  en rouge (-) (soit la fin du régime transitoire pour  $H_b(t)$ ); (b) : à  $\dot{\gamma}t = 880$  (instant  $T_1$ ) en pointillés noir (- -) et à  $\dot{\gamma}t = 990$  (instant  $T_3$ ) en rouge (-). La fraction volumique est calculée avec la méthode d'homogénéisation décrite dans la section 5.1, avec  $h_g = d$ .

La figure 3.7 (a) montre la compaction qui a lieu en début de simulation ( $\dot{\gamma}t \leq 500$ ) et la figure 3.7 (b) met en évidence celle qui a lieu lors de l'augmentation du débit ( $\dot{\gamma}t \simeq 950$ ). Pour la figure 3.7 (a), le lit de grains est au repos pour  $\dot{\gamma}t = 0$  et est en mouvement pour  $\dot{\gamma}t = 500$ , on observe alors une décompaction de la surface du lit de grains pour permettre l'écoulement des grains dans cette zone. Mis à part ce phénomène, on constate une compaction du lit de grains sur toute sa hauteur, ce qui n'est possible que si les grains à ces profondeurs ont été mis en mouvement. C'est bien ce que l'on observe sur la figure 3.6 pour  $\dot{\gamma}t \simeq 250$  par exemple. Sur la figure 3.7 (b), on constate une compaction pour  $y \geq 4d$ , la densité volumique de grains restant quasiment inchangée dans la couche mobile. Or  $H_b(t)$  prend également des valeurs d'environ  $4d$  lors de cet événement.

On peut remarquer sur les figures 3.2 et 3.6 qu'un autre événement de réorganisation en profondeur semble avoir lieu pour  $\dot{\gamma}t \simeq 1300$ , c'est à dire en toute fin de simulation. Le lit de grains est donc dans un état métastable après le régime transitoire ( $500\dot{\gamma}t$ ) et c'est toujours le cas même après l'événement de compaction qui a lieu pour  $\dot{\gamma}t \simeq 950$ . La compaction du lit n'est pas terminée après la simulation.

Une dernière donnée permet de mettre en évidence cette compaction du lit de grains. On compare la hauteur initiale du lit au repos, notée  $H_l^0$ , et sa hauteur après la simulation et retour à un état de repos, notée  $H_l^\infty$ . Pour obtenir cette valeur, on a prolongé la simulation après avoir arrêté le forçage afin d'atteindre un nouvel état de repos. Les hauteurs  $H_l^0$  et  $H_l^\infty$  sont définies de la manière suivante : On découpe le domaine de simulation en colonnes de côté  $d$  (on a donc  $\frac{L_x}{d} \times \frac{L_z}{d}$  colonnes). Dans chaque colonne, on prend la position verticale du grain le plus haut. Et ensuite, on appelle hauteur du lit de grains la moyenne de ces  $\frac{L_x}{d} \times \frac{L_z}{d}$  valeurs. Ici, on obtient  $H_l^0 = 9.77d$  et  $H_l^\infty = 9.50d$ . Cela permet de quantifier un peu mieux cette compaction. Si on note  $\phi^0$  la compacité initiale moyenne du lit et  $\phi^\infty$  sa compacité moyenne après la simulation et le retour au repos du lit, on peut écrire l'équation de conservation du volume de grains :

$$\phi^0 H_l^0 = \phi^\infty H_l^\infty. \quad (3.5)$$

La compaction du lit correspond donc ici à une augmentation de la densité de grain d'un facteur :

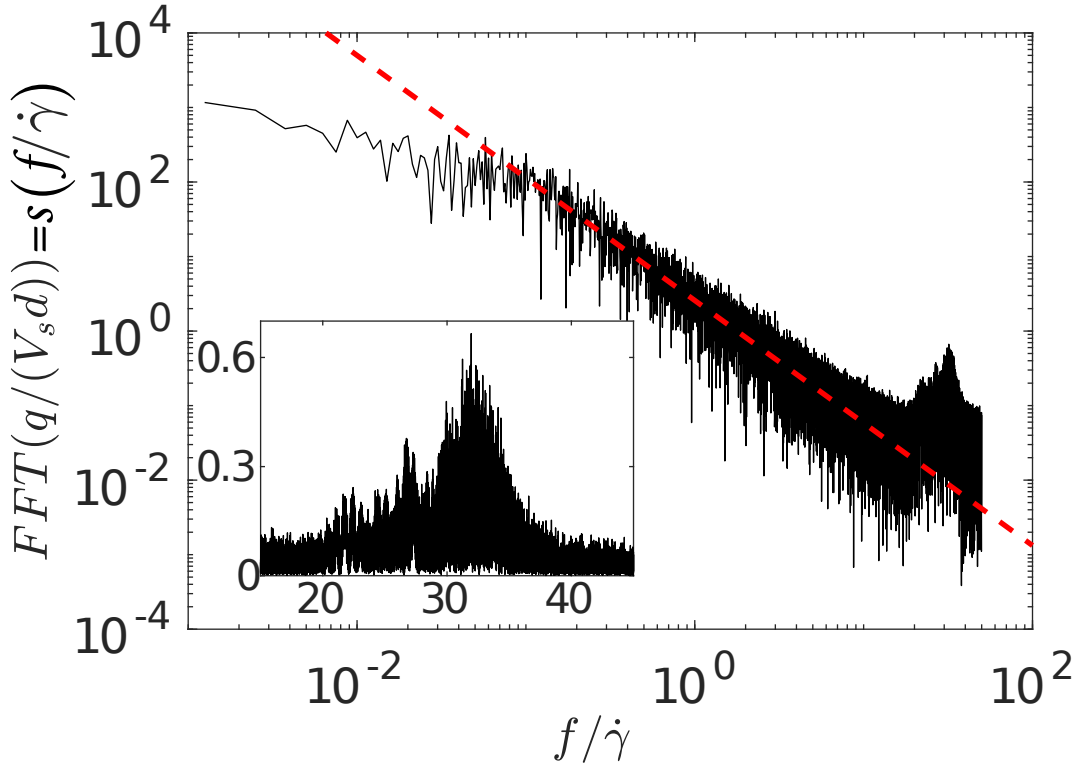
$$\frac{\phi^\infty}{\phi^0} = \frac{H_l^0}{H_l^\infty} = 1.028. \quad (3.6)$$

Ce phénomène de compaction reste faible ( $\leq 3\%$  ici) et bien que certaines grandeurs puissent fortement dépendre de la valeur de  $\phi$ , on négligera ce phénomène par la suite. Le traitement effectué ici coûte cher en temps de calcul et n'a donc pas été fait systématiquement.

On peut finalement affirmer (au moins dans le cas d'un lit de grains initialement lâche) que le lit tend vers un état d'équilibre, ici il se densifie avec le temps. La compaction du lit se fait en grande partie lors de la mise en mouvement du lit mais elle n'a pas encore atteint son état d'équilibre après cette phase. Ensuite, le lit de grains évolue vers cet équilibre de façon discontinue. C'est au travers d'événements localisés dans le temps que le lit de grains se réorganise en profondeur. La plus grande échelle de temps mise en évidence avec cette simulation est donc le temps pour que le lit de grains atteigne son équilibre. Ce temps est très long, beaucoup plus que nos simulations. Lors de ses expériences, CHARRU *et al.* (2004) observe une évolution du lit granulaire pendant environ  $2 \times 10^6 \dot{\gamma} t$  pour  $\theta = 0.17$  et  $Re_p \leq 0.3$  (soit pendant environ  $48h$ ! ( $\dot{\gamma} = 11s^{-1}$ )). La hauteur du lit de grains a varié de 2 diamètres pendant cette durée. Pour des raisons de coût en temps de calcul, ces durées sont inaccessibles avec nos simulations. On peut tout de même remarquer que les événements violents de compaction ont principalement lieu dans le régime transitoire avant de disparaître presque totalement. Ces événements sont rares et de courte durée. Les moyennes temporelles, effectuées pour  $\dot{\gamma} t \geq 500$ , ne seront donc que peu impactées par ce type d'événements. Pour ce cas précis, on peut estimer à environ 3% l'écart sur le débit granulaire saturé engendré par le réarrangement qui a lieu pour  $\dot{\gamma} t \simeq 950$ .

On peut également noter que la durée du régime transitoire pour le débit granulaire ( $\sim 200\dot{\gamma} t$  ici) est la combinaison de deux effets. D'une part, la mise en mouvement des particules en surface du lit sur une durée caractéristique notée  $T_{sat}$  (temps de saturation) et d'autre part sa compaction en profondeur (qui a principalement lieu pour  $\dot{\gamma} t \leq 500$  comme le montre la figure 3.6). Il est donc difficile d'extraire le temps de saturation de ces simulations. Pour s'affranchir du recouvrement de ces deux effets, il faudrait laisser se compacter les lits de grains sur de très grandes durées (afin que le lit atteigne à peu près sa compacité d'équilibre) puis couper le forçage et laisser le lit de grains atteindre un état de repos. On utilisera alors cet état comme nouvel état initial afin de mesurer le temps de saturation  $T_{sat}$  sans que la compaction du lit n'interfère avec la mesure.

On se place désormais exclusivement dans le régime stationnaire ( $\dot{\gamma} t \geq 500$ ) et on va tenter d'interpréter les fluctuations omniprésentes du débit qui sont de faibles amplitudes comparées à ce que l'on a appelé des réorganisations en profondeurs du lit de grains jusqu'à maintenant. La figure 3.2 montre la présence de ces fluctuations du débit sur l'ensemble de la simulation, et en particulier pendant le régime permanent. La figure 3.3 (a) est un zoom de la courbe du débit de grains en fonction du temps. Le débit  $y$  est représenté avec un point tous les  $0.01\dot{\gamma} t$  (soit 500 fois plus de points par unité de temps que sur la figure 3.2) ce qui permet de mettre en évidence des fluctuations de courte durée. On peut voir sur cette figure que les fluctuations de débit ont des amplitudes et des durées très variables et se superposent les unes les autres. La figure 3.3 (b) est un zoom de la figure 3.3 (a) mettant en évidence des variations du débit d'amplitude encore plus faibles et sur des temps encore plus courts, toutefois les fluctuations à cette échelle semblent périodiques. Sur cette figure, 114 périodes sont représentées pour une durée de  $4\dot{\gamma}^{-1}$  ce qui correspond à une fréquence de  $28.5\dot{\gamma}$ . Afin d'en extraire une (ou plusieurs) période(s) caractéristique(s) de variation du débit, on trace la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform, FFT) du signal  $q(t)$  pour  $\dot{\gamma} t \geq 500$  sur la figure 3.8.



**FIGURE 3.8** – Spectre de Fourier du signal  $q(t)/(V_s d)$  pour  $\dot{\gamma}t \geq 500$  (i.e. dans le régime permanent) pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . (---) : loi de puissance  $s(f/\dot{\gamma}) \sim (f/\dot{\gamma})^{-1.55}$ .  
Insert : zoom sur le pic de fréquence  $f/\dot{\gamma} \simeq 32$  en échelle linéaire.

Le spectre fréquentiel du débit granulaire, noté  $s$ , possède un pic de fréquence  $F_{DEM} = 32\dot{\gamma}$  et d'une largeur à mi-hauteur d'environ  $\Delta F = 3\dot{\gamma}$  (figure 3.8). Cette fréquence correspond aux variations du débit granulaire représentées sur la figure 3.3 (b). Elles sont dues à la propagation d'ondes internes dans le milieu granulaire et sont inhérentes à la méthode de résolution de la phase granulaire (DEM et modèle de sphères molles (SADD *et al.* (2000))). Ces oscillations peuvent être dues à des ondes de cisaillement ou de compression (comme des ondes sismiques) liées à l'élasticité des grains et ne sont pas seulement un artefact numérique (MOURAILLE et LUDING (2008)). On peut noter que ce "pic" est en fait constitué de multiples modes de vibrations (modes propres) correspondant à des modes géométriques de vibration différents (SOMFAI *et al.* (2005); voir l'insert sur la figure 3.8). Ces oscillations sont amorties (coefficient de restitution normal  $e_n = 0.7 < 1$ ) mais de l'énergie est injectée dans le système via l'interaction liquide-grain ce qui leur permet de subsister avec cette amplitude durant toute la simulation. Ces oscillations sont particulièrement bien visibles sur les courbes de débit de grains en fonction du temps pour les deux cas de cette étude qui sont en dessous du seuil de mise en mouvement du lit de grains. Dans ces cas, le signal prend la même allure que ceux de JIA *et al.* (1999). Ce signal peut alors s'interpréter comme la superposition des modes "classiques" de propagations dans le "milieu granulaire effectif" et des signaux qui se sont propagés par l'ensemble des chemins possibles dans le milieu granulaire hétérogène; et qui sont donc l'homologue acoustique du *speckle* en optique (JIA *et al.* (1999)). Nous n'avons pas réussi à retrouver l'ordre de grandeur de la fréquence observé via les modèles de propagation acoustique testés. Afin de tout de même crédibiliser l'analyse faite précédemment, on peut citer la propagation des ondes sonores dans des mousses constituées d'eau et d'air. La vitesse de propagation du son dans ces milieux est d'environ  $340m/s$  pour l'air et  $1480m/s$  de l'eau, or la vitesse de propagation dans le milieu effectif mousse peut atteindre  $40m/s$ . Pour un empilement de  $10cm$  de billes de verre sous pression gravitaire, la vitesse des ondes sonores n'est que d'environ  $100m/s$  alors qu'elle est d'environ  $5000m/s$  dans du verre massif (ANDREOTTI

et al. (2012)).

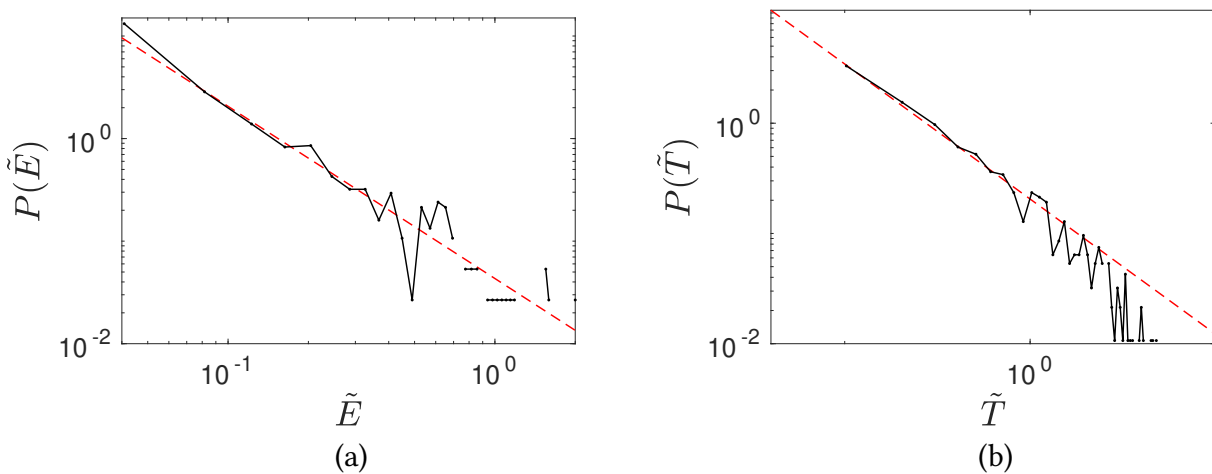
On peut aussi noter que l'amplitude des oscillations reste modérée, la figure 3.3 (b) montre un moment de la simulation où ces fluctuations sont particulièrement grandes et ce pendant une "longue" durée. Sur la majeure partie de la courbe de débit, ces oscillations ne sont pas visibles et même lorsqu'elles sont particulièrement prononcées (comme sur la figure 3.3(b)), elles restent négligeables comparées aux autres fluctuations du débit de grains. Pour donner un encadrement de l'amplitude de ces fluctuations, ici elles sont particulièrement grandes et possèdent une amplitude d'environ  $0.1V_s d$  au maximum et dans les cas sous le seuil de mise en mouvement ( $\theta = 0.11$  et  $Re_p = 0.1$  ou  $1$ ), leur amplitude n'est plus que de quelques  $10^{-9}V_s d$ .

Maintenant qu'on a interprété le pic à haute fréquence, considérons le reste du spectre. Pour les fréquences supérieures à  $5 \times 10^{-2}\dot{\gamma}$ , il est décroissant et suit une loi de puissance (représentée en rouge sur la figure 3.8) du type :

$$s(\tilde{f}) \sim \tilde{f}^{-\beta}, \quad (3.7)$$

où  $\tilde{f} = f/\dot{\gamma}$  et avec  $\beta = 1.55$  dans ce cas là (pour rappel,  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$  ici). La valeur de  $\beta$  varie légèrement (de façon non monotone) avec le nombre de Reynolds particulière  $Re_p$  et le nombre de Shields  $\theta$  et prend des valeurs comprises entre 1 et 1.55 pour la gamme de paramètres explorée lors de cette étude.

Ce type de spectre, vérifiant l'équation (3.7), est connu comme étant caractéristique des phénomènes de criticité d'auto-organisation (Self-Organized Criticality - SOC; BAK et al. (1987, 1988)). Le système ne possède alors pas d'échelle caractéristique de temps, ni d'échelle pour les fluctuations du débit. Cela signifie que le système évolue sans action extérieure vers un état critique ; semblable à ceux qui sont rencontrés lors de certaines transitions de phase, comme par exemple la transition ferromagnétique ou celle d'un équilibre liquide-vapeur au point critique. Pour s'assurer de ce comportement critique, on trace également les distributions de tailles et de durées des fluctuations du débit de grains sur la figure 3.9. On définit la taille adimensionnée  $\tilde{E} = \Delta q/(V_s d)$  d'une fluctuation de la courbe  $q(t)/(V_s d)$  comme la différence entre un minimum local et le maximum local suivant et on définit la durée adimensionnée  $\tilde{T} = \dot{\gamma}\Delta T$  d'une de ces fluctuations comme l'écart temporel entre ces extrema locaux.



**FIGURE 3.9** – Distributions de probabilité (a) : de taille  $\tilde{E}$  et (b) : de durée  $\tilde{T}$  des fluctuations du débit de grains pour  $\dot{\gamma}t \geq 500$ ,  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ .

(- -) : ajustement par une loi de puissance (a) :  $P(\tilde{E}) \sim \tilde{E}^{-1.68}$  ; (b) :  $P(\tilde{T}) \sim \tilde{T}^{-1.23}$ .

La figure 3.9 montre que les distributions de taille et de durée des fluctuations du débit granulaire suivent également des lois de puissance. Pour le cas présent, on obtient :

$$P(\tilde{E}) \sim \tilde{E}^{-1.68}, \quad (3.8)$$

et

$$P(\tilde{T}) \sim \tilde{T}^{-1.23}. \quad (3.9)$$

On peut donc affirmer que notre système présente un comportement critique, sans échelle caractéristique. Les fluctuations observées ont un comportement fractal (que ce soit temporellement ou pour leurs amplitudes). Les fractales sont des objets auto-similaires (*i.e.* invariant par changement d'échelle), cette absence d'échelle caractéristique en étant la définition (MANDELBROT (1983)). Ici, le système n'a pas été pensé pour en retirer ce type d'information, les fonctions de distributions obtenues ne couvrent donc pas une très grande plage de tailles, ou de durées, de fluctuations du débit (environ une décade). Afin de finir de se convaincre du comportement fractal de notre lit de grains, on peut constater que ce comportement d'auto-organisation des milieux granulaires vers un état critique a déjà été décrit plusieurs fois. Premièrement, c'est l'exemple sur lequel se sont appuyés BAK *et al.* (1987) pour décrire le phénomène d'auto-organisation critique pour la première fois en 1987 (avant que le concept ne soit appliqué à de très nombreux domaines allant de la géophysique à la sociologie en passant par la cosmologie et les sciences économiques). Ils utilisent un automate cellulaire afin de décrire le comportement d'un tas de sable et des avalanches ayant lieu à sa surface. On peut noter que cette expérience a été réalisée avec des grains de riz par FRETTE *et al.* (1996) (Une vidéo de cette expérience, refaite par ANDREW HOFFMAN, est disponible à l'adresse : <https://www.youtube.com/watch?v=KnOkkC4QND8>). Dans notre cas, il ne s'agit pas à proprement parler d'avalanche, mais le lit de grains se retrouve tout de même dans des états métastables qui sont perturbés par l'action d'un (ou plusieurs) grain(s) entraîné(s) par le fluide. Ces perturbations sont la cause de ce qu'on a appelé une "réorganisation en profondeur" et qu'on appellera désormais un événement de grande taille. Ce type de réorganisation peut être assimilé à une grosse avalanche et on pourra aussi assimiler tout événements de ce type à une avalanche, quelque soit le nombre de grains sollicités. On peut également citer DALTON et CORCORAN (2001) qui ont étudié expérimentalement un système assez similaire à celui de CHARRU *et al.* (2004), et donc au notre, où le cisaillement est imposé par une plaque au lieu d'un fluide. À l'aide de cette expérience, ils ont aussi mis en évidence un comportement critique auto-similaire pour le comportement temporel ainsi que pour la distribution en amplitude des événements rencontrés.

Le comportement fractal observé ici reste toutefois limité. Les distributions tracées sur la figure 3.9 cessent de suivre des lois de puissance pour les grands événements (longue durée ou grande amplitude). Ce comportement des distributions  $P(\tilde{E})$  et  $P(\tilde{T})$  peut être attribué à deux phénomènes. Premièrement, il peut s'agir d'un effet de taille finie du domaine que l'on simule. En effet, nous possédons un nombre limité de particules ( $N_p = 170$ ) ce qui rend impossible un événement qui mobiliserait plus de grains que ceux disponibles. De plus, ce type d'événement est particulièrement rare or nos simulations sont également limitées dans le temps. Ces effets de taille finie avaient déjà été observés par BAK *et al.* (1987). Cette coupure pour les grands événements peut également être attribué au fait que l'on perturbe "souvent" le lit de grains avec le cisaillement du fluide et les particules qui y retombent. Ces perturbations peuvent arriver en même temps et leur effets auront alors tendance à se chevaucher, ce qui peut être responsable de la coupure aux grands événements (BAK *et al.* (1988)). Pour le spectre fréquentiel du signal  $q(t)$  (figure 3.8), la coupure a lieu pour les basses fréquences (correspondant aux événements de longue durée), un bruit blanc prend alors le dessus (BAK *et al.* (1988)).

On peut finalement remarquer l'absence de fluctuations dues à la traversée des cellules du maillage par les interfaces IBM des grains mobiles (voir chapitre 2). Cela peut s'expliquer par le fait que de



nombreux grains traversent ces interfaces de façon incohérente les uns par rapports aux autres et qu'elles sont d'amplitude plus faible que celles dues aux contacts.

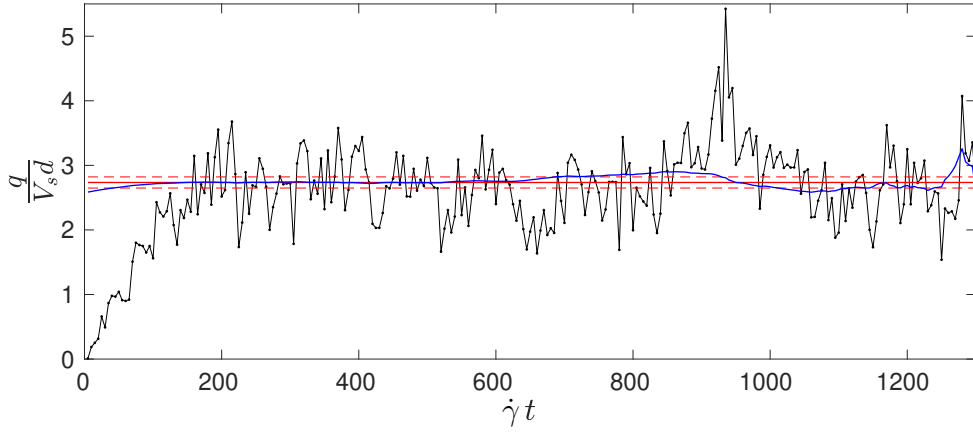
### 3.3 Prise de moyennes temporelles

On se place désormais dans le régime permanent ( $\dot{\gamma}t \geq 500$  pour le cas considéré ici :  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ ) et on souhaite estimer la valeur moyenne du débit dans ce régime ; ce débit s'appelle le débit granulaire saturé et est noté  $q_{sat}$ . On souhaite compenser la taille limitée du domaine de simulation par des prise de moyennes temporelles. Cela sous-entend qu'on fait l'hypothèse que le système étudié est ergodique (BOLTZMANN (1871); MAXWELL (1879)). Cette hypothèse consiste à supposer l'égalité entre la moyenne sur l'ensemble des configurations possibles d'un lit de grains et la moyenne temporelle. Autrement dit, l'évolution temporelle du système le fait passer par l'ensemble des états accessibles de l'espace des phases. On annotera les moyennes d'ensembles avec  $\dagger$  pour les distinguer des moyennes temporelles. On appelle donc  $q_{sat}^\dagger$  le débit saturé (défini via une moyenne sur l'ensemble des réalisations possibles) et  $q_{sat}$  son estimation via la moyenne temporelle de  $q(t)$ . On sait déjà que l'hypothèse d'ergodicité n'est pas vérifiée pour le fond du lit de grains qui est statique et n'explore donc pas du tout l'espace des phases mais elle plutôt bien justifiée pour la couche de grains mobiles qui est en mouvement et est mélangée au cours du temps. On peut aussi noter que ce problème n'est en fait pas toujours vraiment un ; en effet, dans la partie statique du lit, la vitesse du fluide est presque nulle et celle des grains l'est aussi ; une moyenne d'ensemble de 0 prend la même valeur qu'une moyenne temporelle de 0. Le problème reste toutefois entier pour la fraction volumique de grains par exemple.

Pour s'assurer de la convergence statistique de notre estimation des valeurs moyennes calculées, on définit la fonction qui à un instant  $t$  donné associe la moyenne de la grandeur considérée calculée entre l'instant  $t$  et la fin de la simulation. En particulier, pour le débit granulaire on définit :

$$q_{conv} : t \mapsto \frac{1}{t_{max} - t} \int_t^{t_{max}} q(t) dt, \quad (3.10)$$

où  $t_{max}$  est l'instant final de la simulation. Supposons que la simulation considérée est suffisamment longue pour permettre d'obtenir une bonne estimation du débit saturé  $q_{sat}^\dagger$ . Alors, en partant de  $t = t_{max}$  et en faisant diminuer la valeur de  $t$ ,  $q_{conv}$  part de  $q(t_{max})$  et tend vers  $q_{sat}$ . La fonction  $q_{conv}$  possède alors un plateau à la valeur  $q_{sat}$  jusqu'à ce qu'on atteigne le régime transitoire et alors  $q_{conv}$  décroche de ce plateau. Si la simulation n'est pas assez longue pour estimer le débit saturé, la fonction  $q_{conv}$  ne possède pas de plateau. On trace  $q_{conv}(t)$  (en bleu) ainsi que  $q(t)$  (en noir) sur la figure 3.10.



**FIGURE 3.10** – Débit granulaire adimensionné par  $V_s d$  en fonction du temps adimensionné  $\dot{\gamma}t$ . (–) : débit instantané  $q(t)/V_s d$ ; (–) : fonction  $q_{conv}(t)/V_s d$ ; (–) : débit saturé  $q_{sat}/V_s d$ ; (– –) : bornes de l’intervalle de confiance à 95% pour  $q_{sat}^\dagger/V_s d$ .

La figure 3.10 montre que  $q_{conv}$  atteint un pallier pour  $\dot{\gamma}t \in [200, 600]$ . La valeur de ce pallier correspond à notre estimation  $q_{sat}$  du débit saturé pour ce jeu de paramètres sans dimension.

On peut estimer l’intervalle de confiance à 95% centré autour de cette valeur du débit  $q_{sat}$  et alors la vraie valeur moyenne du débit  $q_{sat}^\dagger$  aura 95% de chance de s’y trouver. On sait déjà que la distribution des fluctuations du débit ne suit pas une loi normale mais le nombre d’échantillons utilisé pour estimer la moyenne est grand et bien que ces échantillons ne soient pas vraiment indépendants, il est raisonnable de faire l’hypothèse que la distribution des valeurs de  $q_{sat}$  suit approximativement une loi normale. Il s’agit de la distribution des valeurs de  $q_{sat}$  qui seraient obtenues pour plusieurs réalisations de cette même simulation. En supposant que l’estimation de l’écart-type du débit de grains mesuré  $\sigma_q$  sur ce jeu de données est une estimation suffisamment fiable de l’écart-type du débit de grains  $\sigma_q^\dagger$ , on peut alors affirmer que le débit saturé  $q_{sat}^\dagger$  (issu d’une moyenne d’ensemble, et non d’une moyenne temporelle) appartient dans 95% des cas à l’intervalle :

$$q_{sat}^\dagger \in \left[ q_{sat} - t_{95}^n \frac{\sigma_q}{\sqrt{n}}, q_{sat} + t_{95}^n \frac{\sigma_q}{\sqrt{n}} \right], \quad (3.11)$$

où  $t_{95}^n$  est le coefficient de STUDENT (1908) pour  $n$  échantillons et un niveau de confiance de 95%. On calcule  $\sigma_q$  à l’aide de l’estimateur non biaisé :

$$\sigma_q = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (q(t_i) - q_{sat})^2}, \quad (3.12)$$

où  $t_i$  est l’instant correspondant au  $i^{eme}$  échantillon. Ici, on utilise un point tous les  $5\dot{\gamma}t$  pour  $500 \leq \dot{\gamma}t \leq \dot{\gamma}t_{max} = 1300$ , donc  $n = 160$  et on trouve alors  $t_{95}^n = 1.975$ . Finalement, on obtient :

$$\frac{q_{sat}^\dagger}{V_s d} \in [2.65, 2.82]. \quad (3.13)$$

Sur la figure 3.10, l’intervalle de confiance à 95% est représenté par les deux droites horizontales en pointillés rouges. L’incertitude sur le débit saturé  $q_{sat}^\dagger$  est donc de l’ordre de  $2 \times t_{95}^n \frac{\sigma_q}{\sqrt{n} q_{sat}}$  soit environ 6.3% ici, avec un niveau de confiance de 95%.

Dans la suite de cette étude, on assimilera  $q_{sat}^\dagger$  à son estimation  $q_{sat}$ . Il faudra garder en tête qu’une incertitude sur sa valeur, de l’ordre de quelques pourcents, subsiste. La même procédure est suivie pour toutes les grandeurs moyennées temporellement. On s’est assuré qu’un plateau, indiquant la convergence des statistiques temporelles, existait pour toutes les grandeurs considérées et tous les jeux de paramètres sans dimension considérés.

### 3.4 Convergences en domaine et en maillage

Pour vérifier la convergence des données, on considère quatre cas-tests pour lesquels  $L_x/d = 4$  ou  $8$ ,  $\Delta x/d = 1/10$  ou  $1/20$  et  $\Delta/d = 1.3 \times 10^{-1}$  ou  $6.5 \times 10^{-2}$ . On appelle cas A, celui pour lequel  $\Delta x = d/10$ ,  $L_x = 4d$  ( $= L_z$ ) et  $\Delta = 1.3\Delta x = 0.13d$ . On considère ensuite le cas d’un domaine de simulation plus grand,  $L_x = 8d$ , et on l’appelle le cas B. On garde alors le même pas du maillage et la même épaisseur de frontière immergée que pour le cas A. Les deux cas restant sont effectués avec une résolution spatiale de  $\Delta x = d/20$ . Pour le cas C, l’épaisseur de la frontière immergée reste la même comparée au diamètre  $d$  des grains, *i.e.*  $\Delta = 0.13d = 2.6\Delta x$ . Pour le cas D,  $\Delta$  garde la même valeur comparée à la résolution spatiale du maillage  $\Delta x$ , *i.e.*  $\Delta = 0.065d = 1.3\Delta x$ . Si on les compare au cas A, le cas B montre la dépendance avec la taille du domaine, le cas C la dépendance avec la résolution du maillage (indépendamment de l’épaisseur des frontières IBM). Le cas D doit être comparé au cas C, et alors il montre la dépendance avec l’épaisseur des frontières immergées (indépendamment de la résolution du maillage). Les caractéristiques de chaque cas sont rappelées dans le tableau 3.1. Cette étude est menée pour le nombre de Shields  $\theta = 0.67$ , le nombre de Reynolds particulière  $Re_p = 1$  et le rapport de densités  $r = 2.5$ .

Cas	Résolution spatiale $d/\Delta x$	Taille du domaine de simulation $L_x \times L_y \times L_z$	Épaisseur des frontières immergées $\Delta$	Commentaire
A (●)	10	$4d \times 20d \times 4d$	$1.3\Delta x = 0.13d$	référence
B (■)	10	$8d \times 20d \times 8d$	$1.3\Delta x = 0.13d$	domaine plus grand
C (▲)	20	$4d \times 20d \times 4d$	$2.6\Delta x = 0.13d$	maillage plus fin
D (◆)	20	$4d \times 20d \times 4d$	$1.3\Delta x = 0.065d$	épaisseur IBM réduite

**TABLE 3.1** – Résumé des différents cas considérés.  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ .

cas	$q_{sat}/V_s d$	Écarts relatifs
A	2.51	—
B	2.34	6.77%
C	2.28	9.16%
D	1.92	23.5%

**TABLE 3.2** – Débit granulaire saturé, adimensionné par  $V_s d$  (où  $V_s = \frac{\Delta \rho g d^2}{18\eta_f}$  est la vitesse de Stokes), pour les quatre cas-tests A, B, C et D (voir le tableau 3.1).

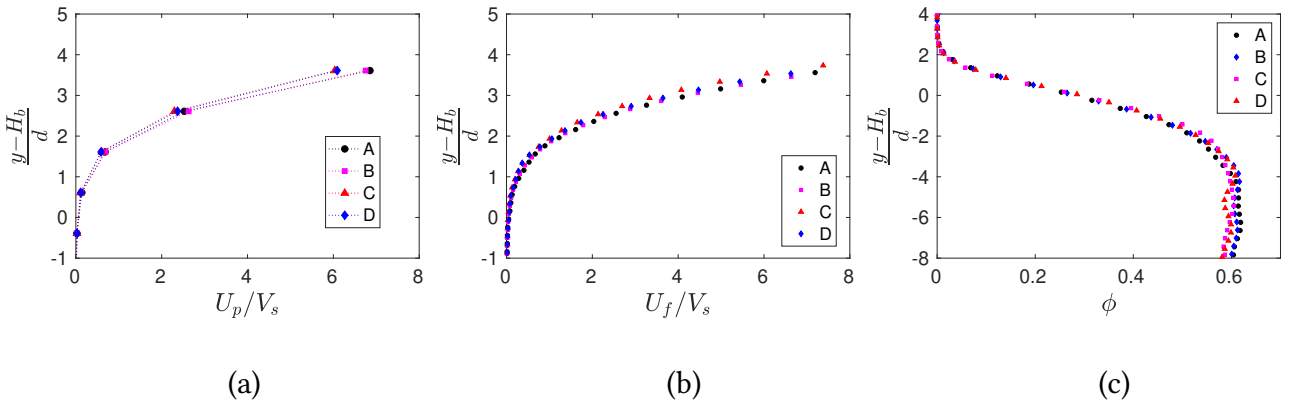
Le tableau 3.2 présente les débits saturés obtenus dans le régime permanent pour chacun des cas-tests. On utilise le cas A comme référence pour calculer les écarts relatifs et comparer les débits obtenus. On choisit ce cas comme référence car c’est celui pour lequel le débit de grains est le plus élevé. Cela permet d’avoir des écarts relatifs qui sont tous du même signe.

On constate dans le tableau 3.2 que les écarts relatifs sur le débit volumique de grains restent inférieurs à 10% pour les cas B et C ; alors que pour le cas D, l’écart relatif dépasse les 20%. Les trois

cas A, B et C correspondent à une épaisseur de la frontière IBM  $\Delta = 0.13d$  contrairement au cas D, pour lequel elle est deux fois plus fine par rapport au rayon des particules,  $\Delta = 0.065d$ . Cette diminution du débit peut être interprétée grâce aux effets de lubrification qui sont mieux résolus pour ce cas là en particulier ; nous y reviendrons rapidement dans la section 4.4. Le choix de l'épaisseur des frontières immergées n'est donc pas un problème purement numérique, des effets physiques en dépendent aussi.

Pour le cas B, le domaine et le nombre de particules sont quatre fois plus grands. L'hypothèse d'ergodicité est donc *a priori* une meilleure approximation pour ce cas là que pour les autres ; on explore à chaque instant environ quatre fois plus de réalisations possibles d'un lit de grains de taille  $4d \times 4d$ . Pour le cas C, le maillage qui est deux fois plus fin que pour le cas A, et l'épaisseur de la frontière IBM est gardée identique (par rapport au diamètre des grains). Ce cas permet donc de tester l'effet du raffinement du maillage, toutes choses égales par ailleurs. Les deux cas, B et C, possèdent un débit de grains légèrement inférieur au cas A mais l'écart entre ces cas-tests reste relativement restreint.

On s'intéresse désormais à la convergence de grandeurs mésoscopiques (*i.e.* locales). On compare les profils verticaux de vitesses granulaire  $U_p$  et fluide  $U_f$ , ainsi que la fraction volumique de grains  $\phi$  sur la figure 3.11. Les profils de vitesses des grains sont obtenus par une méthode de prise de moyenne volumique "simple" (voir la section 5.2.1.2 pour une description de cette méthode) avec 12 sous-domaines équitablement répartis sur l'épaisseur du lit de grains (chaque sous-domaine possédant une épaisseur  $d$ ). Les profils de vitesse moyenne du fluide et de fraction volumique de grains sont, quant à eux, obtenus via la méthode de changement d'échelle de JACKSON (2000) (décrite dans la section 5.1) avec  $h_g = d$ .



**FIGURE 3.11** – (a) : Profils verticaux de la vitesse moyenne des grains; (b) : Profils verticaux de la vitesse moyenne du fluide; (c) : Profils verticaux de fraction volumique solide moyenne  $\phi$ , pour le cas-test (●) : A; (■) : B; (▲) : C; (◆) : D.

On peut voir sur la figure 3.11 que les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes pour tous les cas-tests ; les courbes de vitesse du fluide ou de fraction volumique de grains sont pratiquement superposées. Le fluide est légèrement plus lent pour le cas C que pour les autres cas-tests, cet écart atteint  $0.72V_s$  au maximum (au sommet du lit de grains) entre les cas B et C ; cet écart correspond à environ 10% de la vitesse du fluide à cette hauteur. Pour la fraction volumique de grains, les différences sont principalement situées dans la partie statique du lit grains. On peut tout de même remarquer que  $\phi$  passe de façon un peu plus abrupte de sa valeur maximale à 0 pour les cas C et D. Finalement, on peut noter qu'il y a deux tendances différentes pour les profils de vitesse granulaire. Pour les cas A et B, on obtient des vitesses plus élevées que pour les cas C et D. Au maximum, la différence sur les vitesses particulières moyennes maximales est d'environ de  $0.82V_s = 7 \times 10^{-2}\dot{\gamma}d$  ce qui représente 12% de la vitesse maximale du cas A.

Finalement, à la vue des observations précédentes, c'est le raffinement du maillage qui est le paramètre numérique le plus critique ici. Les résultats ne varient pratiquement pas si on prend un domaine quatre fois plus grand, on peut donc en conclure que la convergence en domaine est atteinte ; du moins que c'est le cas pour les grandeurs moyennées temporellement. Les résultats obtenus dépendent encore un peu du raffinement du maillage et il serait souhaitable de raffiner au maximum le maillage. Toutefois, faire diminuer  $\Delta x$  d'un facteur 2 augmente le nombre de cellules composant le maillage d'un facteur 8 ; et pour garder le coefficient  $C_{CFL}$  constant, il faut aussi diviser le pas de temps d'un facteur 2. Les simulations pour lesquelles  $\Delta x = d/20$  nécessitent donc des durées de calcul environ 16 fois plus longues que pour  $\Delta x = d/10$  et il faut également environ 8 fois plus de mémoire vive pour pouvoir les faire tourner ; ces coûts sont prohibitifs si l'on souhaite effectuer une étude paramétrique du problème. On considère alors que les écarts observés par rapport au cas A ne sont pas trop importants et on choisit de mener notre étude avec les mêmes caractéristiques que le cas A, c'est-à-dire  $\frac{d}{\Delta x} = 10$ ,  $\Delta = 1.3\Delta x = 0.13d$  et un domaine de taille horizontale  $L_x \times L_z = 4d \times 4d$ .

Le choix de l'utilisation d'un domaine de faible extension horizontal est également motivé par le fait qu'on ne souhaite pas voir apparaître d'instabilités du lit de grains. Ces instabilités sont à l'origine des rides et des dunes que l'on peut observer dans de nombreuses conditions. Ici, on souhaite garder la surface du lit de grains horizontale et indépendante du temps (en moyenne), on a donc intérêt à utiliser un "petit" domaine (*i.e.*  $L_x \leq \lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la perturbation instable) afin de ne pas laisser d'instabilités se développer. Pour donner un ordre de grandeur, BOUTELOUP (2017) obtient une relation de dispersion qui implique des instabilités du lit pour les longueurs d'ondes  $\lambda \geq 14d$ , pour  $\theta = 0.4$ ,  $Re_p = 7.35$  et pour  $\rho_p/\rho_f = 2.5$ .

Une étude de convergence plus poussée a été réalisée en s'appuyant sur d'autres grandeurs (contraintes apparentes, viscosité effective de la phase fluide, coefficient de friction solide de la phase granulaire) et se trouve dans l'annexe F.



# Chapitre 4

## Physique du transport granulaire en régime permanent

### Sommaire

---

4.1	Analyse dimensionnelle du problème d'un lit de grains cisailé . . . . .	71
4.2	Un modèle analytique en régime laminaire (MOUILLERON <i>et al.</i> (2009)) . . .	73
4.3	Caractérisation du transport granulaire . . . . .	76
4.3.1	Débit granulaire saturé . . . . .	76
4.3.2	Couche de grains mobiles . . . . .	80
4.3.2.1	Hauteurs d'un lit de grains . . . . .	80
4.3.2.2	Épaisseur de la couche de grains mobiles . . . . .	84
4.3.3	Profils de vitesse des particules . . . . .	87
4.3.3.1	Retour sur l'épaisseur de la couche mobile . . . . .	90
4.3.3.2	Profil universel de vitesse granulaire . . . . .	92
4.3.4	Distributions de probabilité des vitesses des grains . . . . .	94
4.3.4.1	Distributions des vitesses dans le sens de l'écoulement . . . . .	94
4.3.4.2	Distributions des vitesses perpendiculaires à l'écoulement . . . . .	99
4.3.5	Densités surfaciques de grains mobiles et vitesses moyennes . . . . .	107
4.4	Influence des effets de lubrification . . . . .	115

---

L'étude du transport granulaire par un écoulement de cisaillement a fait l'objet de nombreuses études aussi bien expérimentales que numériques ou théoriques, que ce soit dans des régimes laminaires ou turbulents. La plupart des études expérimentales ont été effectuées en régime turbulent (WHITE (1940); BAGNOLD (1954); VANONI *et al.* (1966); PAINTAL (1971); BUFFINGTON et MONTGOMERY (1997)). Des expériences en régime laminaire ont aussi été réalisées depuis (CHARRU *et al.* (2004); OURIEMI *et al.* (2007); MOUILLERON *et al.* (2009); AUSSILLOUS *et al.* (2013)). On peut également citer les études théoriques en régime laminaire de LEIGHTON et ACRIVOS (1986), de BAGNOLD (1956), de MOUILLERON-ARNOULD (2002), de MOUILLERON *et al.* (2009) et aussi celle d'OURIEMI *et al.* (2009). Les études numériques sont plus récentes, on citera en particulier celles de DERKSEN (2011), de DURÁN *et al.* (2014) et de BOUTELOUP (2017) en régime laminaire ou celles de KIDANEMARIAM et UHLMANN (2014a,b) en régime laminaire et turbulent. Toutes ces études montrent une forte influence du nombre de Shields sur la réponse du lit de grains mais ne se penchent généralement pas, ou peu, sur les effets du nombre de Reynolds et du rapport des densités des grains et du fluide porteur.

On a vu, au chapitre 2, que le choix de la description de la frontière à l'échelle microscopique avait une forte influence sur les interactions liquide-grain et se faisait donc ressentir à l'échelle macroscopique. La forte dispersion des mesures expérimentales est probablement due à cette dépendance entre les échelles microscopique et macroscopique ainsi qu'au manque de contrôle des paramètres de surface des grains utilisés (rugosité, aspérités, sphéricité, etc) et donc à un manque de contrôle de l'échelle microscopique. Toutefois, numériquement, on est obligé de choisir un modèle de description pour l'ensemble des grains. On a également vu que les variations, notamment avec le nombre de Reynolds particulière  $Re_p$  ou avec la fraction volumique de solide  $\phi$ , étaient quant à elles relativement indépendantes du choix de la description microscopique. Les valeurs des différents paramètres numériques utilisés sont rappelées à la fin des chapitres 2 et 3.



## 4.1 Analyse dimensionnelle du problème d'un lit de grains cisailé

On a vérifié dans les chapitres précédents que le domaine de simulation était assez grand et que les choix numériques n'engendraient pas des erreurs trop grandes. On va maintenant s'intéresser au transport granulaire en régime permanent d'un lit de grains immergé dans un écoulement laminaire cisailé. Le problème est schématisé et les notations sont données sur la figure 4.1.

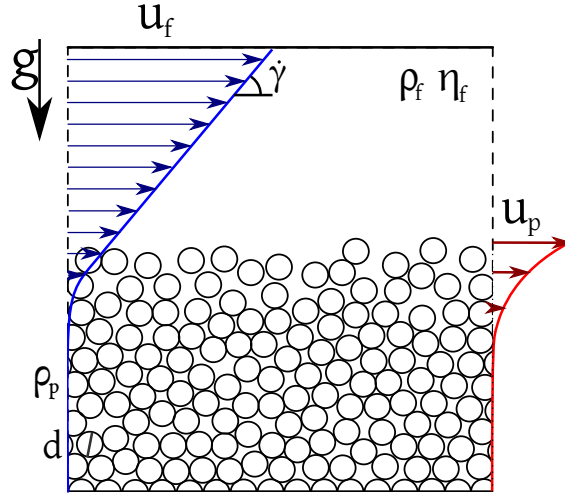


FIGURE 4.1 – Schéma du problème considéré.

Ce problème est caractérisé par dix paramètres physiques (dimensionnels) :

- la masse volumique du fluide  $\rho_f$ ,
- le cisaillement dans le fluide  $\dot{\gamma}$ ,
- la viscosité du fluide  $\eta_f$ ,
- l'accélération de la pesanteur  $g$ ,
- le nombre de particules  $N_p$ ,
- la masse volumique des grains  $\rho_p$ ,
- le diamètre des grains  $d$ ,
- le coefficient de friction entre grains  $\mu$ ,
- la durée des contacts entre grains  $t_{col}$ ,
- et le coefficient de restitution normal  $e_n$ .

À partir de ces grandeurs, on peut définir sept nombres sans dimension indépendants (BUCKINGHAM (1914)). D'abord le nombre de Shields  $\theta$  qui est le rapport entre une force déstabilisante appliquée aux grains et une autre stabilisante pour ces derniers. Ici, la force déstabilisante est l'action hydrodynamique liée au cisaillement  $\eta_f \dot{\gamma} d^2$  et la force stabilisante est le poids apparent des grains  $(\rho_p - \rho_f)gd^3$ . Le nombre de Shields prend donc la forme suivante :

$$\theta = \frac{\dot{\gamma} \eta_f}{(\rho_p - \rho_f)gd}. \quad (4.1)$$

Pour des faibles valeurs de celui-ci, le cisaillement n'est pas suffisant pour mettre en mouvement le lit de grains alors que pour des valeurs plus élevées, les grains sont entraînés par le fluide, et ce d'autant plus que le nombre de Shields est grand. On note  $\theta_c$  la valeur minimale du nombre de Shields permettant un transport stationnaire de grains. La mesure de ce seuil est très sensible car il est difficile à définir et nécessite des mesures sur des temps longs, c'est pourquoi les valeurs trouvées dans la littérature sont très variables. En régime laminaire, ce seuil se situe vers  $\theta_c = 0.12 \pm 0.03$  (OURIEMI *et al.* (2007)).

On définit un second nombre sans dimension, le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ . Il représente le rapport des effets inertiels et visqueux exercés sur une particule :

$$Re_p = \frac{\rho_f \dot{\gamma} d^2}{\eta_f}. \quad (4.2)$$

Notons que le rapport  $Re_p/\theta$  correspond à un nombre de Galilée, indépendant du cisaillement  $\dot{\gamma}$ . On définit ensuite un troisième nombre sans dimension, le rapport de la densité des grains et de celle du fluide :

$$r = \frac{\rho_p}{\rho_f}. \quad (4.3)$$

Dans cette étude, le rapport des densités  $r$  sera (sauf contre-indication) pris égal à 2.5, ce qui correspond à du sable dans de l'eau. On définit également la compacité initiale moyenne du lit de grains par :

$$\Phi_0 = \frac{N_p \frac{\pi d^3}{6}}{H_0 L_x L_z}, \quad (4.4)$$

où  $L_x$  et  $L_z$  sont respectivement la longueur et la largeur du domaine de simulation et  $H_0$  est la hauteur initiale du lit de grains. Il s'agit du rapport du volume occupé par les grains et du volume total. Les derniers nombres sans dimension que l'on considère sont le coefficient de restitution  $e_n$  (défini par l'équation (2.10)), le coefficient de friction inter-particules  $\mu$  et le rapport entre la durée d'un contact entre grains et le temps caractéristique du fluide (associé au cisaillement)  $\dot{\gamma} t_{col}$ .

On peut réduire le nombre de dimensions de l'espace des paramètres pour cette étude en ne considérant que des particules solides (non déformables), on prend alors  $\dot{\gamma} t_{col} \ll 1$  et le problème devient indépendant de la valeur de ce paramètre sans dimension. Ensuite, le coefficient de friction inter-particules a été mesuré expérimentalement pour un grand nombre de matériaux et de formes de particules, que ce soit immergé dans l'eau ou non (PROCTER et BARTON (1974) en fait une revue relativement détaillée). Pour du quartz immergé dans de l'eau, on trouve dans la littérature des valeurs de coefficient de friction inter-particules  $\mu$  variant de  $\mu = 0.25$  à  $0.5$  en fonction des études (on suppose qu'il y a égalité entre les coefficients de friction statique et dynamique). De plus, DERKSEN (2011) montre que la physique à l'échelle du lit de grains ne dépend pas de ce paramètre (au moins pour  $\theta \simeq 0.4$  et  $\mu = 0, 0.1, 0.25$  ou  $+\infty$ ). On choisit alors de fixer ce paramètre à  $\mu = 0.25$  pour l'ensemble de cette étude. La valeur du coefficient de restitution normal a été fixée à  $e_n = 0.7$  dans toutes nos simulations. La valeur réelle de ce coefficient dans le cas de sable de silice est sans doute plus grande que cela mais pour des raisons de stabilité numérique associée à la DEM, il est préférable de ne pas prendre des valeurs trop proches de la valeur limite 1 (pour du verre,  $e_n \simeq 0.94$  d'après NEWTON et HALLEY (1780), par exemple). Enfin, on souhaite principalement étudier le régime stationnaire pendant cette étude or la compacité du lit s'adapte à l'écoulement et devient donc indépendante de la compacité initiale  $\Phi_0$  après que le régime transitoire est passé.

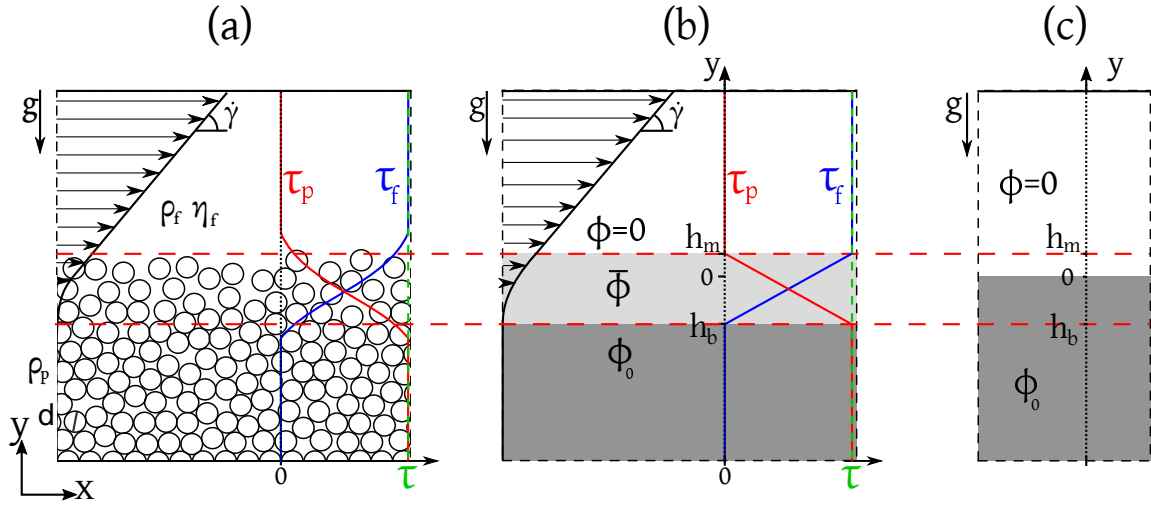
Nous avons exploré l'espace des paramètres pour  $Re_p \in [0.1, 10]$ ,  $\theta \in [0.11, 0.67]$  et  $r = 2.5$ . On a fait varier le nombre de Reynolds particulaire et le nombre de Shields, indépendamment l'un de l'autre. On a modifié la valeur de l'accélération de la pesanteur  $g$  (uniquement) pour faire varier le nombre de Shields. Et on a fait varier le taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  et la viscosité dynamique du fluide  $\eta_f$

pour modifier le nombre de Reynolds particulaire. Pour ce faire, on a gardé le produit  $\eta_f \dot{\gamma}$  constant mais pas le rapport  $\frac{\dot{\gamma}}{\eta_f}$ .

Afin de rendre non-dimensionnel le problème étudié, on définit les échelles de longueur  $L_0 = d$ , de masse  $M_0 = \rho_f d^3$  et de temps  $T_0 = \dot{\gamma}^{-1}$ . Pour l'échelle de vitesse, il est possible de fabriquer plusieurs vitesses caractéristiques à partir des grandeurs présentées. Pour les vitesses verticales, on peut prendre comme vitesse caractéristique la vitesse de sédimentation des particules. En régime rampant, pour les nombres de Reynolds  $Re_p \rightarrow 0$ , cette vitesse de chute s'appelle la vitesse de Stokes et sera notée  $V_s = \Delta \rho g d^2 / (18 \eta_f)$  mais en régime inertiel, pour les nombres de Reynolds  $Re_p \gg 1$ , l'échelle de vitesse pour la vitesse terminale de chute est plutôt  $V_0 = \sqrt{\Delta \rho g d / \rho_f}$ . Et pour la vitesse dans le sens de l'écoulement, on peut prendre une vitesse caractéristique basée sur le taux de cisaillement  $U_0 = L_0 / T_0 = \dot{\gamma} d$  ou une vitesse basée sur la contrainte de cisaillement  $\tau$  au sommet de lit de grains, la vitesse de frottement,  $u^* = \sqrt{\tau / \rho_f} = \sqrt{\dot{\gamma} \eta_f / \rho_f}$ . On peut noter que DURÁN *et al.* (2014) utilisent également la vitesse caractéristique  $V_0$  pour normaliser la vitesse dans le sens de l'écoulement. Cette échelle de vitesse est *a priori* plus adaptée pour un régime turbulent, quand  $F_{drag} \propto u^2$ , sachant qu'on peut écrire qu'au seuil de mise en mouvement  $F_{drag} \simeq \mu P_p = \mu \Delta \rho g d^3$ . Ces différentes vitesses caractéristiques sont reliées entre elles par des relations simples faisant intervenir les nombres sans dimension  $\theta$  et  $Re_p$ ; entre autres, on a  $V_s / (\dot{\gamma} d) = 1 / (18 \theta)$ ,  $V_0 / (\dot{\gamma} d) = 1 / \sqrt{\theta Re_p}$  et  $u^* / (\dot{\gamma} d) = 1 / \sqrt{Re_p}$ .

## 4.2 Un modèle analytique en régime laminaire (MOUILLERON *et al.* (2009))

Dans cette section, on présente le modèle analytique développé par MOUILLERON *et al.* (2009) sur lequel on s'appuiera régulièrement dans la suite de ce chapitre. Il s'agit d'une simplification du modèle de BAGNOLD (1956). Le problème est considéré stationnaire et invariant dans le sens de l'écoulement et dans la direction transverse à l'écoulement, ainsi toutes les grandeurs ne dépendent que de la coordonnée verticale  $y$ . Dans ce modèle, on suppose qu'il y a compétition entre la gravité et la force induite par le cisaillement ce qui met en suspension les couches supérieures du lit de grains et que, de plus, les particules interagissent uniquement via les interactions hydrodynamiques (absence de contact). On suppose aussi que la compacité de la couche de grains mobiles est constante dans toute son épaisseur  $\phi(y) = \bar{\phi}$  et on note  $\phi_0$  la compacité du lit de grains au repos (et de la zone statique du lit lorsque l'on est au-dessus du seuil de mise en mouvement). Les vitesses des phases fluide et granulaire sont supposées égales  $u_f = u_p = u$ . Ce modèle est donc *a priori* uniquement adapté aux faibles nombres de Reynolds et loin du seuil de mise en mouvement, lorsque l'épaisseur de grains mobiles devient grande devant le diamètre des grains. On note  $h_b$  la position où la vitesse s'annule et  $h_m$  la position du haut de la couche mobile et on définit la position  $y = 0$  comme étant la hauteur du lit de grains lorsqu'il est au repos. La figure 4.2 illustre ce modèle et en donne les notations. Ce modèle, bien que simple, donne des résultats satisfaisants lorsqu'il est comparé aux expériences pour des nombres de Shields  $\theta < 0.5$  et pour des nombres de Reynolds particuliers  $Re_p \leq 0.24$ .



**FIGURE 4.2** – Schéma du modèle de MOUILLERON et al. (2009). (a) : écoulement de cisaillement non modélisé; (b) modélisation de l'écoulement de cisaillement; (c) : état de repos du lit de grains dans le cadre de ce modèle (absence de cisaillement). La vitesse  $u$  est représentée sur la gauche des schémas et les contraintes de cisaillement ( $\tau$ ,  $\tau_p$  et  $\tau_f$ ) sur leur droite.

On décompose la contrainte totale en la somme d'une contribution du fluide et d'une autre venant des grains :

$$\tau = \tau_f + \tau_p. \quad (4.5)$$

De plus, on suppose que l'on peut exprimer la contrainte de cisaillement de la phase granulaire comme :

$$\tau_p = \mu P_p = \mu \bar{\phi} \Delta \rho g (h_m - y), \quad (4.6)$$

où  $P_p = \bar{\phi} \Delta \rho g (h_m - y)$  est la pression granulaire et  $\mu$  le coefficient de friction effectif de la phase granulaire. On écrit aussi que la contrainte de cisaillement effective de la phase fluide s'écrit :

$$\tau_f = \eta_{eff} \frac{du_f}{dy} = \eta_r \eta_f \frac{du}{dy}, \quad (4.7)$$

où  $\eta_r$  est la viscosité apparente de la phase fluide divisée par la viscosité dynamique du fluide  $\eta_f$ . Il existe des relations de fermeture permettant d'exprimer cette viscosité relative. Par exemple, dans le cas d'une suspension diluée, cette viscosité relative est donnée par la relation d'EINSTEIN (1906, 1911) :  $\eta_r = \frac{\eta_{eff}}{\eta_f} = 1 + \frac{5}{2} \bar{\phi}$ . On peut alors remplacer  $\tau_f$  et  $\tau_p$  dans (4.5) par les expressions (4.6) et (4.7). On obtient ainsi l'équation différentielle sur la vitesse suivante :

$$\frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\eta_r \eta_f} - \frac{\mu \bar{\phi} \Delta \rho g (h_m - y)}{\eta_r \eta_f}. \quad (4.8)$$

On note  $V_s$  la vitesse de Stokes :  $V_s = \frac{\Delta \rho g d^2}{18 \eta_f}$ . Il s'agit de la vitesse terminale de sédimentation d'une sphère pour  $Re \rightarrow 0$ . On intègre ensuite la relation (4.8) de  $h_b$  à  $y$  ( $\leq h_m$ ) afin d'obtenir la relation suivante :

$$\frac{u(y)}{V_s} = \frac{9 \mu \bar{\phi}}{\eta_r} \left( \frac{y - h_b}{d} \right)^2 + \left( \frac{y - h_b}{d} \right) \frac{18 \mu \bar{\phi}}{\eta_r} \left[ \frac{\theta}{\mu \bar{\phi}} - \frac{h_m - h_b}{d} \right], \quad (4.9)$$

pour tout  $y$  vérifiant  $h_b \leq y \leq h_m$  et où  $\theta = \frac{\tau}{\Delta \rho g d}$  est le nombre de Shields.

De plus, en  $y = h_b$ , on a  $\tau_f = 0$  (car  $\frac{du}{dy}(y = h_b^-) = 0$ ). On peut donc en déduire que :

$$\tau(y = h_b) = \tau_p(y = h_b) = \mu \bar{\phi} \Delta \rho g(h_m - h_b). \quad (4.10)$$

En manipulant la relation (4.10), on obtient alors la relation donnant l'épaisseur de la couche mobile  $\Delta H$  en fonction du nombre de Shields :

$$\frac{\Delta H}{d} = \frac{h_m - h_b}{d} = \frac{\theta}{\mu \bar{\phi}}. \quad (4.11)$$

Et ainsi, l'expression de la vitesse (4.9) est réduite à :

$$\frac{u(y)}{V_s} = \frac{9\mu\bar{\phi}}{\eta_r} \left( \frac{y - h_b}{d} \right)^2, \quad (4.12)$$

pour tout  $y \in [h_b, h_m]$ . La dépendance vis-à-vis du nombre de Shields est cachée dans  $h_b$  ainsi que dans  $h_m$ . On peut en obtenir des expressions en écrivant l'équation de conservation du volume (ou de la masse) de grains entre un état de repos et l'état considéré (voir les figures 4.2 (b) et (c)) :

$$-\phi_0 h_b = \bar{\phi}(h_m - h_b), \quad (4.13)$$

donc

$$\frac{h_b}{d} = -\frac{\theta}{\mu\phi_0}. \quad (4.14)$$

On peut alors en déduire l'expression du débit volumique de grain (par unité de largeur) :

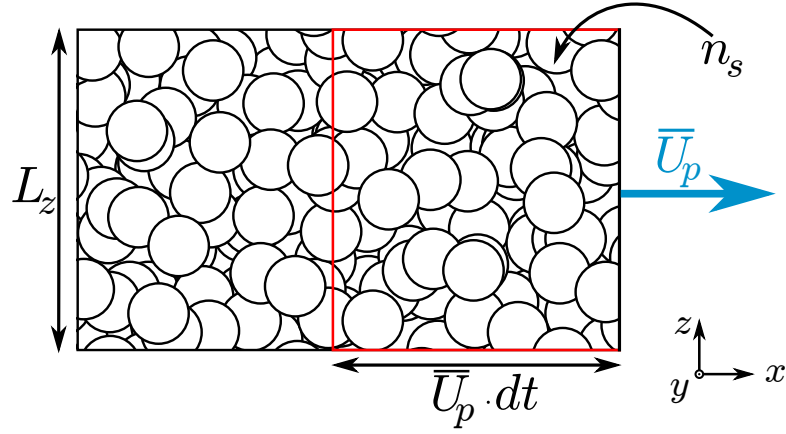
$$q = \frac{1}{L_z} \int_{h_b}^{h_m} L_z \bar{\phi} u dy = \frac{3\theta^3}{\eta_r \bar{\phi} \mu^2} V_s d = \frac{\theta^2}{6\eta_r \bar{\phi} \mu^2} \dot{\gamma} d^2. \quad (4.15)$$

où  $\dot{\gamma} = \frac{du_f}{dy}(y \geq h_m)$  est le cisaillement du fluide au-dessus du lit de grains. Et on peut également définir la vitesse moyenne (non pondérée) des particules, notée  $\bar{U}_p$  :

$$\bar{U}_p = \frac{1}{\Delta H} \int_{h_b}^{h_m} u(y) dy = \frac{q}{\bar{\phi} \Delta H} = \frac{3\theta^2}{\eta_r \mu \bar{\phi}} V_s = \frac{\theta}{6\eta_r \mu \bar{\phi}} \dot{\gamma} d. \quad (4.16)$$

Considérons une dernière grandeur caractéristique de l'écoulement de grains : la densité surfacique de particules mobiles, notée  $n_s$ . Elle correspond au nombre de particules en mouvement par unité de surface (horizontale). Cette grandeur est reliée au débit granulaire par l'intermédiaire de la vitesse moyenne. En effet, la définition du débit granulaire (en  $m^3/s$ ) est le volume de grains qui traverse une surface (verticale) par unité de temps. Le nombre de grains  $dN$  traversant cette surface pendant  $dt$  est  $dN = n_s \bar{U}_p dt L_z$  (voir le schéma 4.3 pour les notations) ce qui correspond au volume de solide  $dV = V_p n_s \bar{U}_p dt L_z$ , où  $V_p$  est le volume d'une particule. Le débit granulaire  $Q$  est donc  $Q = \frac{dV}{dt} = V_p n_s \bar{U}_p L_z$  (en  $m^3/s$ ) et le débit granulaire linéique (par unité de longueur selon  $z$ )  $q = V_p n_s \bar{U}_p$ . On peut donc définir la densité surfacique de grains mobiles (dans le régime stationnaire) par :

$$n_s = \frac{q}{V_p \bar{U}_p}. \quad (4.17)$$



**FIGURE 4.3** – Schéma représentant une portion de largeur  $L_z$  du lit de grains vue du dessus.  $\bar{U}_p$  est à la vitesse moyenne des grains mobiles et  $n_s$  leur densité surfacique. Les particules qui traversent la surface de droite (celle où la vitesse  $\bar{U}_p$  est représentée) pendant la durée  $dt$  correspondent alors aux grains contenus dans le cadre rouge.

Dans le cadre du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009), on obtient donc :

$$n_s = \frac{6}{\mu\pi d^2} \theta. \quad (4.18)$$

MOUILLERON *et al.* (2009) estiment les valeurs des différents paramètres de leur modèle (à l'aide de relations de fermetures pré-existantes et d'un ajustement de leurs données expérimentales) et obtiennent les valeurs suivantes :

- $\eta_r = 2.45$  (via la relation de KRIEGER et DOUGHERTY (1959)),
- $\mu = 0.75$  (via la relation de BAGNOLD (1954); les corrélations de CASSAR *et al.* (2005) mènent environ à la même valeur de  $\mu$ ),
- $\bar{\phi} = 0.27$  (via un ajustement de  $(h_m - h_b)/d = f(\theta)$  sur leurs données expérimentales),
- et  $\phi_0 = 0.6$  (valeur mesurée).

Par la suite, nous utiliserons ces valeurs des paramètres pour tracer les différentes relations obtenues ici.

## 4.3 Caractérisation du transport granulaire

Dans cette partie, on étudie les caractéristiques des écoulements granulaires simulés dans le cadre de ce travail de thèse. On les compare aux études pré-existantes ainsi qu'au modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) afin de s'assurer des capacités de la méthode de résolution mise en place. On étudie le comportement temporel de nos simulations puis les grandeurs stationnaires moyennes et leurs dépendances vis-à-vis du nombre de Shields et du nombre de Reynolds.

### 4.3.1 Débit granulaire saturé

On a vu dans la partie précédente qu'après un régime transitoire de  $500\dot{\gamma}t$  (pour le cas  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ,  $r = 2.5$ ), le système atteignait un régime que l'on qualifie de permanent. Bien que les différentes grandeurs fluctuent dans ce régime, on peut estimer les valeurs moyennes de ces grandeurs,

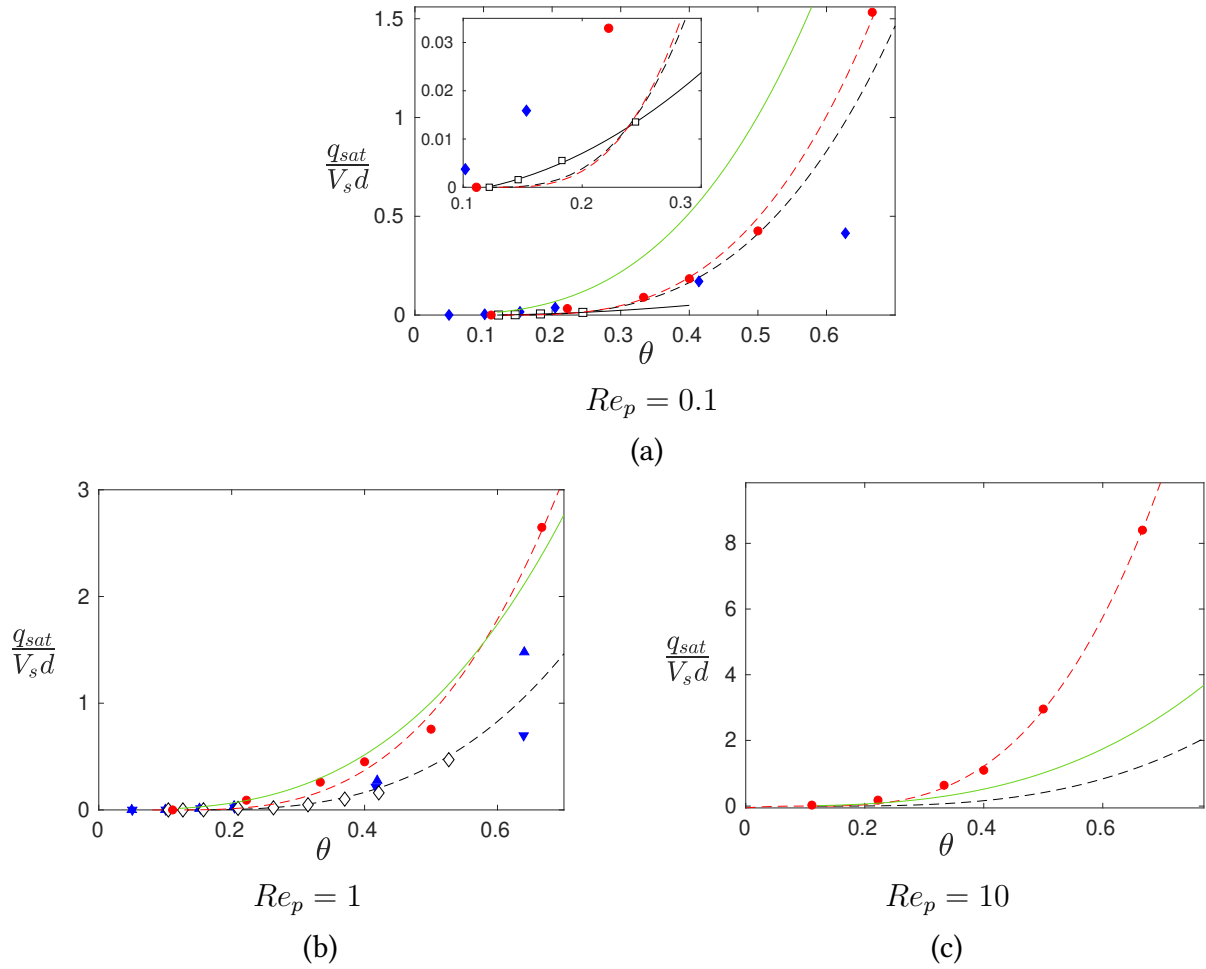
et étudier l'évolution de ces grandeurs avec les paramètres sans dimensions. Commençons par le débit saturé qui est la grandeur la plus simple à mesurer expérimentalement. La figure 4.4 présente l'évolution de  $q_{sat}$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$ , pour les trois nombres de Reynolds particulière  $Re_p = 0.1, 1$  et  $10$ . Il existe de nombreux modèles donnant le débit saturé  $q_{sat}$  en fonction de  $\theta$ . Qu'elles soient d'origine expérimentale, numérique ou analytique (voir chapitre 1), ces corrélations sont généralement développées pour de très faibles nombres de Reynolds ou au contraire pour des régimes turbulents. On se limitera ici aux cas laminaires, qui correspondent à la gamme de nombres sans dimension explorée. On citera en particulier le modèle analytique de CHARRU et MOUILLERON-ARNOULD (2002) se basant sur l'approche semi-empirique de resuspension visqueuse de LEIGHTON et ACRIVOS (1986) :

$$\frac{q_{sat}}{V_s d} = 7.5 (\theta - \theta_c)^3, \quad (4.19)$$

avec  $\theta_c = 0.2$ . Cette loi est tracée en pointillés noirs sur la figure 4.4. Proche du seuil de mise en mouvement, on pourra utiliser la corrélation expérimentale obtenue par CHARRU *et al.* (2004) dans un canal de Couette annulaire :

$$\frac{q_{sat}}{V_s d} = 0.44 \theta (\theta - \theta_c), \quad (4.20)$$

où  $\theta_c = 0.12$ . Cette loi a été obtenue pour des faibles nombres de Reynolds particuliers,  $Re_p \leq 0.3$ , et pour des nombres de Shields  $\theta \leq 0.24$ . On l'a tracée en trait plein noir sur la figure 4.4 (a) et pour  $\theta \leq 0.3$  en insert de cette même figure. On a aussi tracé en vert le débit granulaire obtenu à l'aide du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) et donné par l'équation (4.15).



**FIGURE 4.4** – Débit saturé  $q_{sat}$ , adimensionné par  $V_s d$ , en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour (a) :  $Re_p = 0.1$ , (b) :  $Re_p = 1$  et (c) :  $Re_p = 10$ . (●) : étude présente; (◆) : DERKSEN (2011) pour  $Re_p = 0.16$  et  $r = 4$ ; (▼) : DERKSEN (2011) pour  $Re_p = 0.505$  et  $r = 4$ ; (▲) : DERKSEN (2011) pour  $Re_p = 1.48$  et  $r = 4$ ; (□) : expériences de CHARRU et al. (2004); (◇) : simulations de BOUTELOUP (2017) pour  $Re_p = 0.5$  et  $r = 4$ ; (–) : CHARRU et al. (2004) (équation (4.20)); (– –) : CHARRU et MOUILLERON-ARNOULD (2002) (équation (4.19)); (– · –) : MOUILLERON et al. (2009) (équation (4.15)), et (– –) : ajustements de nos données par des lois cubiques du type  $\frac{q_{sat}}{V_s d} = K (\theta - \theta_c)^3$ . On obtient (a) :  $\frac{q_{sat}}{V_s d} = 9.71 (\theta - 0.13)^3$ , (b) :  $\frac{q_{sat}}{V_s d} = 15.1 (\theta - 0.11)^3$  et (c) :  $\frac{q_{sat}}{V_s d} = 47.5 (\theta - 0.105)^3$ .

On observe sur la figure 4.4 que le débit de grains augmente lorsque le nombre de Shields  $\theta$  augmente, et ce pour les trois valeurs de nombre de Reynolds particulières  $Re_p = 0.1$ , 1 et 10. Cette variation est bien décrite par une loi du type  $q_{sat} = a(\theta - \theta_c)^3 V_s d$ . On note aussi que, à  $\theta$  fixé, le débit saturé  $q_{sat}$  augmente fortement avec le nombre de Reynolds particulaire. On remarque également que les simulations à  $\theta = 0.11$  se situent sous le seuil de mise en mouvement du lit de grains pour  $Re_p = 0.1$  et 1 mais est au-dessus du seuil pour  $Re_p = 10$ .

Pour  $Re_p = 0.1$  (figure 4.4 (a)), les valeurs du débit granulaire obtenus sont supérieures à celles de CHARRU et al. (2004) (relation (4.20)) pour les valeurs proches du seuil de mise en mouvement (insert de la figure 4.4 (a)). Pour les nombres de Shields  $\theta$  plus élevés, les valeurs obtenues sont en bon accord avec la relation (4.19). L'accord est également bon avec les données de DERKSEN (2011) pour  $\theta \leq 0.5$ . Pour des valeurs plus élevées de  $\theta$ , nous obtenons des valeurs de débit de grains nettement supérieures aux siennes malgré un nombre de Reynolds particulaire et de rapport de densité supérieurs aux nôtres; or le débit granulaire aurait plutôt tendance à croître avec  $Re_p$  et  $r$  d'après DERKSEN (2011) (même si BOUTELOUP (2017) n'observe pas d'effet significatif de ces paramètres adi-



mensionnés sur le débit de grains). Pour cette valeur du nombre de Reynolds particulière,  $Re_p = 0.1$ , le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) surestime le débit granulaire (par rapport à toutes les autres données disponibles). Cet écart est sans doute dû aux valeurs des paramètres du modèles qui sont restées inchangées (et qui ont été fixées pour  $Re_p = 0.24$ ).

Pour  $Re_p = 1$  (figure 4.4 (b)), on constate une augmentation du débit de grains d'un facteur 2 environ par rapport aux résultats à  $Re_p = 0.1$ . Ici aussi, le nombre de Shields de  $\theta = 0.11$  se situe sous le seuil de mise en mouvement. On surestime encore le débit vis-à-vis des résultats de DERKSEN (2011), que ce soit pour  $Re_p = 0.505$  ou  $Re_p = 1.48$ , et ce d'autant plus que  $\theta$  est grand. Il en est de même pour les résultats de BOUTELOUP (2017), qui eux suivent plutôt bien la loi cubique de MOUILLERON-ARNOULD (2002)(équation (4.19)) pour ce nombre de Reynolds ( $Re_p = 0.48$ ). La variation du débit granulaire  $q_{sat}$ , adimensionné par  $V_s d$ , avec le nombre de Shields  $\theta$  est tout de même bien décrite, pour ce nombre de Reynolds aussi, par une loi cubique. Un ajustement d'une telle loi sur nos données mène à la courbe rouge en pointillées (équation donnée en légende de la figure 4.4). De plus, les débits obtenus ici sont également bien décrits par le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009).

Finalement, pour un nombre de Reynolds particulière de  $Re_p = 10$ , la figure 4.4 (c) montre que le débit augmente encore, environ d'un facteur 3 par rapport à  $Re_p = 1$ . Nous n'avons plus de données pertinentes auxquelles comparer nos résultats pour ce nombre de Reynolds, toutefois un ajustement par une loi cubique permet encore une fois une bonne description des débits obtenus. On peut noter que pour ce nombre de Reynolds particulière, le cas  $\theta = 0.11$  est désormais au-dessus du seuil de mise en mouvement.

Pour conclure, on peut dire que nos simulations montrent qu'au-dessus du seuil de mise en mouvement, le débit granulaire adimensionné par  $V_s d$  varie de façon cubique avec le nombre de Shields. De plus, pour  $Re_p = 10$  et  $\theta = 0.11$ , on se situe au-dessus du seuil de mise en mouvement. Or pour le même nombre de Shields mais pour  $Re_p = 0.1$  ou 1, nous étions en dessous du seuil. La valeur de ce seuil semble donc dépendre du nombre de Reynolds particulière. Si on s'appuie sur les valeurs de ce seuil obtenues grâce aux ajustements de nos données (voir la légende de la figure 4.4), on constate effectivement que ce seuil diminue lorsque  $Re_p$  augmente. Pour les résultats de DERKSEN (2011), on rappelle qu'il a utilisé un modèle de lubrification (pour la direction normale) dans ses simulations, nous reviendrons sur ce point à la fin de ce chapitre (section 4.4).

On peut aussi se demander comment varient ces débits avec le nombre de Reynolds particulière  $Re_p$ . On trouve alors qu'une loi en  $Re_p^{0.4}$  décrit bien les variations du débit avec le nombre de Reynolds particulière et ce pour tous les nombres de Shields considérés. On peut alors donner une expression empirique du débit granulaire obtenu avec la présente méthode en fonction du nombre de Shields et du nombre de Reynolds particulière :

$$\frac{q_{sat}}{V_s d} = 16.5 Re_p^{0.4} (\theta - \theta_c)^3, \quad (4.21)$$

pour

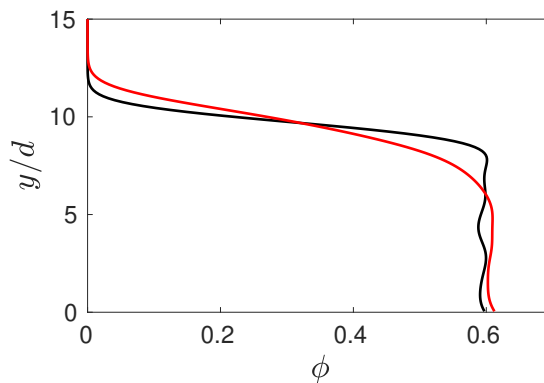
$$\theta \geq \theta_c \simeq 0.12. \quad (4.22)$$

L'écart entre cette corrélation (équation (4.21)) et les débits obtenus n'excède pas  $0.15V_s d$  pour les nombre de Shields  $\theta \leq 0.4$ . Cet écart augmente ensuite jusqu'à un maximum d'environ  $V_s d$  pour  $Re_p = 10$ , ce qui représente alors environ 12% d'erreur. On peut être plutôt confiant concernant la corrélation (4.21) qui se base sur un grand nombre de données, mais par contre nous ne disposons pas d'assez de données de simulation précises pour déterminer une corrélation fiable de la valeur du seuil  $\theta_c = f(Re_p)$ . On peut tout de même dire que ce seuil est une fonction (faiblement) décroissante du nombre de Reynolds. La valeur obtenue ici est cohérente avec l'encadrement du seuil de mise en mouvement d'OURIEMI *et al.* (2007) :  $\theta_c = 0.12 \pm 0.03$  pour des nombres de Reynolds particulières vérifiant  $4 \times 10^{-6} \leq Re_p \leq 0.2$ . On peut même en élargir le domaine de validité au moins jusqu'à  $Re_p = 1$ , voire même probablement jusqu'à  $Re_p = 10$ . On peut noter que l'expression :  $q_{sat}/V_s d =$

$8.3 Re_p^{0.4} \theta^3$  prédit également le débit granulaire de façon fiable sans avoir recours à un seuil de mise en mouvement (qu'il est difficile d'évaluer précisément); cette seconde expression étant uniquement valable au-dessus de ce seuil.

### 4.3.2 Couche de grains mobiles

Lors du transport granulaire par un cisaillement de fluide, ce sont les particules à la surface du lit qui sont mises en mouvement et il en résulte une décompaction de la couche supérieure afin de permettre cet écoulement de grains (figure 3.7 (a)). Le fond du lit reste quant à lui statique à de rares occasions près, lors des événements des réorganisations du lit de grains mentionnés à la section 3.2 (figure 3.7 (b)). On souhaite alors définir une taille caractéristique pour l'épaisseur de cette couche de grains mobiles ainsi que la hauteur moyenne du lit de grains (lorsqu'il est au repos, ou pas); cette hauteur peut alors servir d'origine de l'axe des ordonnées (indépendamment de la profondeur du lit de grains considéré). Afin de se rendre compte de ces phénomènes locaux, on peut par exemple étudier le profil vertical de fraction volumique de grain  $\phi$ . Deux profils de fraction volumique solide sont représentés sur la figure 4.5, l'un est le profil moyen dans le régime stationnaire (en rouge) et l'autre (en noir) est le profil pour le même lit granulaire mais au repos (à  $t = 0$ ). Le détail du calcul de cette quantité mésoscopique est donné dans le chapitre 5. L'idée principale est d'effectuer localement des moyennes spatiales des différentes grandeurs, sur un "petit volume" autour du point considéré, puis d'effectuer la moyenne temporelle de cette quantité locale et instantanée.



**FIGURE 4.5** – Profil vertical de fraction volumique de grains  $\phi$ . (–) :  $\phi(y, t = 0)$ ; (—) : moyenne temporelle de  $\phi(y, t)$  effectuée dans le régime permanent. La fraction volumique est calculée avec la méthode d'homogénéisation de JACKSON (2000) qui est décrite dans la section 5.1, en prenant  $h_g = d$ .

La fraction volumique de solide passe continûment d'une valeur nulle au-dessus du lit à sa valeur maximale dans le lit statique. Cette transition est abrupte dans un lit au repos et s'élargit lorsque le lit est mis en mouvement (voir figure 4.5). Cet élargissement correspond à la décompaction mentionnée précédemment. Commençons par définir la hauteur du lit de grains avant de s'occuper de l'épaisseur de la couche mobile.

#### 4.3.2.1 Hauteurs d'un lit de grains

On a déjà défini la hauteur moyenne du lit de grains lorsqu'il est au repos,  $H_l$  dans la section 3.2. Pour déterminer cette grandeur, on découpe le domaine en  $L_x/d \times L_z/d$  sous-domaines de taille  $d \times L_y \times d$ . Ensuite,  $H_l$  est définie comme la moyenne des altitudes des grains les plus hauts dans chaque sous-domaine. L'avantage de cette définition est qu'elle est relativement simple à mettre en œuvre et qu'elle n'est pas trop influencée par des variations locales de la hauteur du lit de grains

grâce à l'utilisation de la moyenne.

Une autre définition possible de la hauteur du lit de grains est de prendre l'altitude du grain le plus haut (sur l'ensemble du domaine à disposition), on la note  $H_m$ . Cette définition est la plus simple à mettre en œuvre mais elle ne prend pas en compte les variations locales de la hauteur du lit. Pour un "grand" domaine ( $L_x \times L_z \gg d^2$ ), de fortes fluctuations de la hauteur locale du lit de grains pourraient rendre cette définition caduque.

On peut également définir la hauteur du lit à partir de données mésoscopiques (*i.e.* moyennée en espace de façon locale). La procédure de prise de moyenne est développée dans le chapitre 5. On définit, par exemple, la hauteur  $H_\phi$  comme l'altitude à laquelle  $\phi(H_\phi) = \phi_{max}/2 \simeq 0.3$ , où  $\phi_{max}$  est la compacité maximale atteinte au sein du lit de grains. Cette définition en apparence simple n'est pas facilement accessible (nécessité d'avoir accès à la répartition des grains au sein du lit). De plus, elle dépend de la façon de calculer le champ mésoscopique  $\phi(y, t)$ .

Enfin, on peut aussi faire intervenir des grandeurs cinématiques dans le calcul de la hauteur du lit de grains. DURÁN *et al.* (2012) proposent par exemple d'utiliser la hauteur  $h_{bed}$  définie par :

$$h_{bed} = \frac{\int y \, dq}{\int dq} = \frac{\int y \, \phi \, u_p \, dy}{\int \phi \, u_p \, dy}, \quad (4.23)$$

où les intégrales portent sur tout le domaine, de  $y = 0$  à  $y = L_y$ , et  $dq$  représente le débit granulaire élémentaire passant entre les hauteurs  $y$  et  $y + dy$ . On peut donc voir  $h_{bed}$  comme la position du barycentre des débits granulaires locaux. Cette approche est presque inaccessible expérimentalement (nécessité d'avoir accès aux profils de fraction solide  $\phi(y)$  et de vitesse des grains  $u_p(y)$ ) mais elle prend à la fois en compte la répartition des particules et leur vitesse. On peut remarquer que cette définition est la seule (de celles présentées ici) qui n'est pas définie pour un lit au repos.

Notons que, pour un lit au repos, ces différentes hauteurs sont définies tel que décrit précédemment et dans le cas d'un lit en régime permanent, on effectue le même traitement pour chaque instant avant d'effectuer la moyenne temporelle des hauteurs instantanées obtenues.

Cette liste des définitions possibles de la hauteur du lit de grains n'a pas pour ambition d'être exhaustive. Le tableau 4.1 donne les différentes valeurs de ces hauteurs pour le cas  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ , à  $t = 0$ , dans le régime permanent ainsi qu'après retour au repos du lit de grains (après les  $1300\dot{\gamma}t$  de simulation). Le lit de grains a été préparé par sédimentation pour faire environ 10 diamètres de grains de haut.

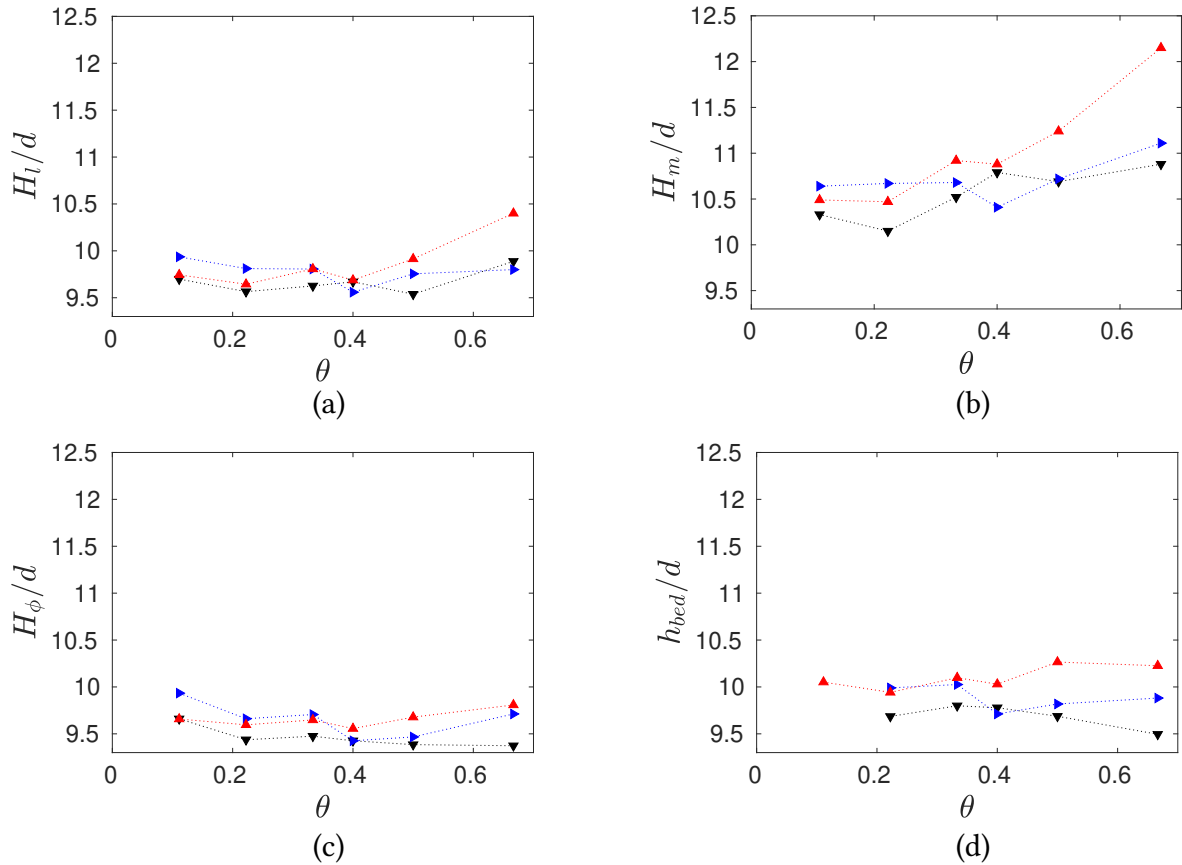
	repos ( $t = 0$ )	régime permanent	repos (" $\infty$ ")
$H_l$	$9.78d$	$9.80d$	$9.50d$
$H_m$	$10.1d$	$11.1d$	$10.2d$
$H_\phi$	$9.73d$	$9.71d$	$9.54d$
$h_{bed}$	—	$9.88d$	—

**TABLE 4.1** – Hauteurs du lit de grains pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$  en régime permanent (moyenne temporelle des hauteurs instantanées) ainsi que les hauteurs du même lit lorsqu'il est au repos, à  $t = 0$  et après les  $1300\dot{\gamma}t$  de simulation (" $\infty$ "), pour  $Re_p = 0$ ,  $\theta = 0$  et  $r = 2.5$ .

Le tableau 4.1 donne les valeurs des différentes définitions de la hauteur du lit de grains au repos et dans le régime permanent. Les hauteurs  $H_l$  et  $H_\phi$  montrent la compaction du lit au cours de la simulation (qui correspond à un abaissement du haut du lit de  $0.19d$  à  $0.28d$  en fonction de la définition choisie dans ce cas). Par contre,  $H_m$  augmente de  $0.07d$  entre les mêmes situations. C'est le problème de cette définition de la hauteur. Bien que le lit de grains se soit globalement compacté (et donc abaissé), la position du grain le plus haut est plus haute même après la compaction globale. Pour les valeurs en régime permanent, on voit que  $H_l$  et  $H_m$  prennent des valeurs supérieures à celles prises à  $t = 0$  et  $t = \infty$ . C'est le comportement attendu, le lit se dilate lorsqu'il est mis en mouvement, sa hauteur augmente donc. Pour  $H_\phi$ , le comportement est différent. Dans le régime

stationnaire, elle prend une valeur intermédiaire, entre  $H_\phi(t = 0)$  et  $H_\phi^\infty$ . Cela peut être dû à la compaction globale du lit ou à l'asymétrie du profil de  $\phi$  au niveau de la surface du lit dans le régime permanent. On voit déjà apparaître la difficulté de définir précisément la hauteur d'un lit de grains. On obtient des valeurs s'étalant sur presque 1 diamètre de grain en fonction du choix de la définition de la hauteur du lit.

On s'intéresse maintenant plus particulièrement aux valeurs prises dans le régime permanent et on trace sur la figure 4.6 les différentes définitions de la hauteur du lit de grains en fonction du nombre de Shields  $\theta$ , pour les trois valeurs de nombre de Reynolds  $Re_p = 0.1, 1$  et  $10$ .

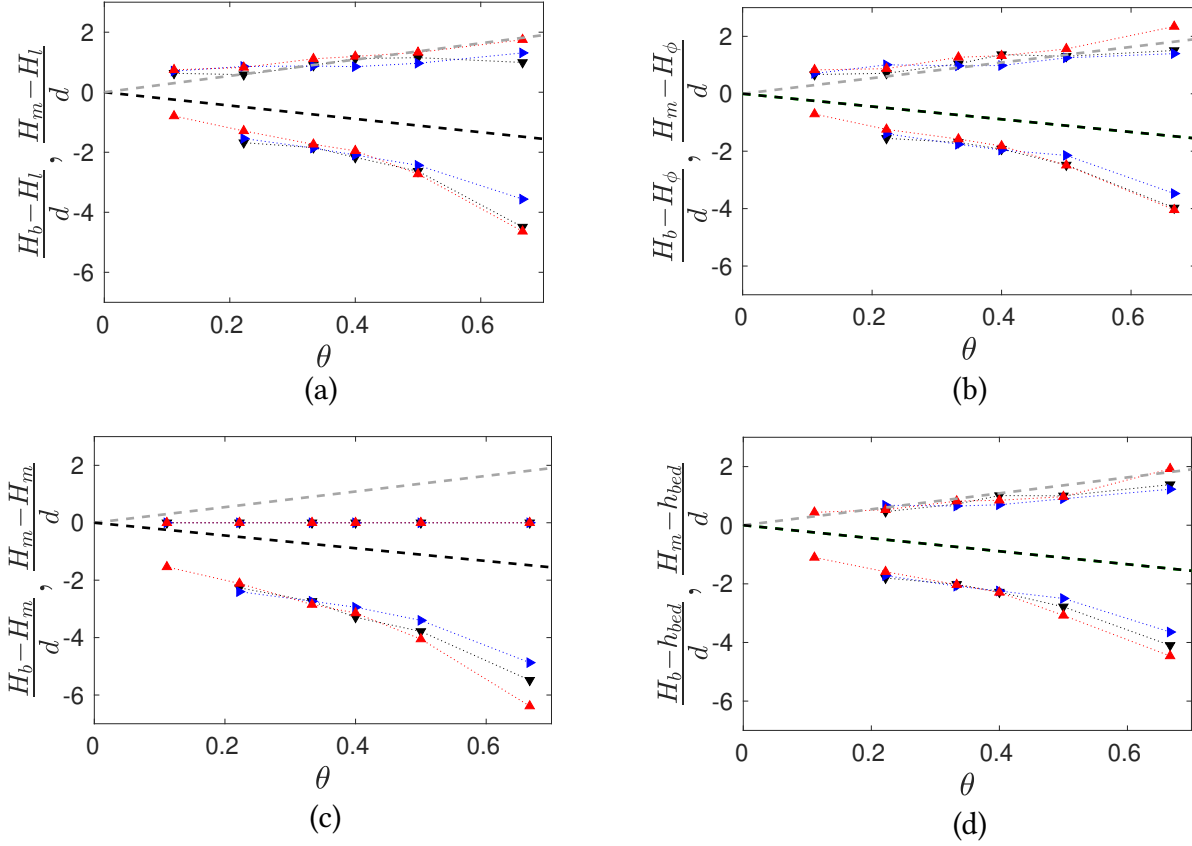


**FIGURE 4.6** – Hauteurs du lit de grains en fonction du nombre de Shields  $\theta$ , pour les nombres de Reynolds particulières ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ . (a) :  $H_l$ ; (b) :  $H_m$ ; (c) :  $H_\phi$ ; (d) :  $h_{bed}$ .

Aucune tendance claire ne semble se dégager, quelque soit la définition de la hauteur du lit considérée. Ceci signifie que l'arrangement des grains dans la zone statique du lit de grains influence davantage sa hauteur que la réaction de la couche supérieure à l'écoulement. De plus, on a vu que le lit se compactait lentement au cours de la simulation, ce qui ajoute une source d'incertitude quant à la détermination de la hauteur du lit de grains. De plus, sur un des cas avec le nombre de Shields le plus grand, cette compaction correspond à un abaissement de la hauteur du lit de grains d'environ un quart de diamètre de grain. Cette valeur n'est pas négligeable ici car les plages de variations des différentes hauteurs sont de l'ordre du diamètre de grain. On peut tout de même noter que  $H_m$  semble croître avec le nombre de Shields  $\theta$  (surtout pour  $Re_p = 10$ ). Il en est de même pour  $H_l$  dans une moindre mesure. Et on peut aussi remarquer que  $h_{bed}$  semble croître quand le nombre de Reynolds particulière  $Re_p$  augmente mais sans particulièrement dépendre de  $\theta$ .

Pour essayer de déterminer si l'une ou l'autre de ces définitions est plus adaptée pour servir d'origine de l'axe des ordonnées, on trace  $H_b = f(\theta, Re_p)$  et  $H_m = f(\theta, Re_p)$  avec chacune des origines

possibles sur les figures 4.7 (a) à (d). Rappelons que  $H_b$  est la position du bas de la couche mobile (figure 3.5). Ici, on utilise des valeurs de  $H_b$  déterminées en utilisant la vitesse seuil  $V_{seuil} = 1.67 \times 10^{-3} \dot{\gamma} d = 0.02 V_s$ .



**FIGURE 4.7** – Hauteurs maximale  $H_m$  et minimale  $H_b$  délimitant la couche de grains mobiles en plaçant l’origine de l’axe des ordonnées en (a) :  $H_l$  ; (b) :  $H_\phi$  ; (c) :  $H_m$  ; (d) :  $h_{bed}$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$  et pour les nombres de Reynolds particuliers ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ . (–) : modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) (équation (4.14)) ; (– · –) : modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) (équation (4.24)).

Aucune des définitions de la hauteur du lit de grains présentées sur la figure 4.7 ne semble sortir du lot, à l’exception de  $H_m$  qui n’est pas pertinente comme origine ici. Elles permettent toutes une superposition approximative des valeurs de  $H_b$  et  $H_m$  sur deux droites. C’est en utilisant  $h_{bed}$  comme origine que cette superposition semble la meilleure à la fois pour  $H_m$  et  $H_b$  (pour  $\theta \leq 0.4 - 0.5$ ). Cette superposition des courbes  $H_m = f(\theta)$  et  $H_b = g(\theta)$  pour les différentes valeurs du nombre de Reynolds particulière peuvent être attribuées à la dépendance de  $h_{bed}$  avec ce paramètre sans dimension. En l’état actuel des choses, on ne peut tout de même pas conclure quant à la pertinence d’une définition par rapport aux autres.

On peut aussi comparer ces hauteurs à celles obtenues dans le cadre du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009). L’expression de  $H_b$  en fonction du nombre de Shields est donnée par l’équation (4.14), et en injectant cette relation dans l’équation (4.11), on trouve :

$$\frac{H_m}{d} = \frac{\theta}{\mu} \left( \frac{1}{\bar{\phi}} - \frac{1}{\phi_0} \right). \quad (4.24)$$

Les expressions analytiques de  $H_m$  et  $H_b$  en fonction de  $\theta$  sont tracées sur la figure 4.7. En particulier, les pentes  $\frac{dH_b}{d\theta}$  et  $\frac{dH_m}{d\theta}$  prennent respectivement les valeurs  $\frac{dH_b}{d\theta} = \frac{-d}{\mu\phi_0} \simeq -2.22d$  et  $\frac{dH_m}{d\theta} = \frac{d}{\mu} \left( \frac{1}{\bar{\phi}} - \frac{1}{\phi_0} \right) \simeq 2.72d$  (en prenant  $\bar{\phi} = 0.27$  et  $\phi_0 = 0.6$ ). Ces deux pentes sont du même ordre de

grandeur en valeur absolue. À l'exception de l'utilisation de  $H_m$  comme origine, l'équation (4.24) décrit plutôt bien l'évolution de  $H_m$ . La pente obtenue via la présente méthode dépend de l'origine choisie mais l'ordre de grandeur reste bon. C'est l'utilisation de  $h_{bed}$  comme origine qui permet la meilleure description de  $H_m$  avec l'équation (4.24). Pour  $H_b$ , on obtient un décalage vers le fond du lit de grains d'environ 1 diamètre de grain quelque soit  $\theta$  et  $Re_p$ . Les pentes obtenues sont plutôt conformes à celles obtenues via le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009).  $H_b$  cesse d'évoluer linéairement avec  $\theta$  pour les grandes valeurs de ce paramètre sans dimension (*i.e.* pour  $\theta \geq 0.5$ ).

#### 4.3.2.2 Épaisseur de la couche de grains mobiles

On va maintenant essayer de quantifier l'épaisseur de la couche de grains mobiles. On peut utiliser les mêmes définitions de  $H_m$  et  $H_b$  que dans la section 3.2 (voir la figure 3.5) et on définit alors l'épaisseur de la couche mobile comme la différence de  $H_m$  et  $H_b$  :

$$\Delta H = H_m - H_b. \quad (4.25)$$

L'avantage de cette méthode est le lien simple qu'il y a entre  $\Delta H$  et l'épaisseur effective de la couche mobile mais son principal inconvénient est l'utilisation d'un seuil de vitesse pour  $H_b$ . Le choix de ce seuil va faire varier l'épaisseur obtenue. Pour l'instant, on a utilisé la même valeur du seuil de vitesse que les auteurs précédents, soit :  $V_{seuil} = 0.02V_s$ , où  $V_s$  est la vitesse de Stokes. On pourrait aussi utiliser un seuil de vitesse basé sur d'autres vitesses caractéristiques de l'écoulement que la vitesse de Stokes (qui est plutôt adaptée pour  $Re_p \rightarrow 0$ ).

Dans le même esprit que la définition de  $h_{bed}$ , on peut définir une épaisseur caractéristique de la couche mobile comme l'écart-type des débits locaux autour de leur barycentre (DURÁN *et al.* (2012)) :

$$\delta h = \sqrt{\frac{\int (y - h_{bed})^2 dq}{\int dq}}. \quad (4.26)$$

Cette définition présente l'avantage de ne pas utiliser de seuil de vitesse mais son inconvénient est de ne pas être simplement reliée à l'épaisseur "effective" de la couche mobile. Notons que  $\delta h$  est en général plus faible que  $\Delta H$ . En effet, on a  $\Delta H \sim 5 - 6\delta h$  (voir l'annexe E). De plus,  $\delta h$  dépend de la répartition des grains au sein de la couche mobile ainsi que de leur vitesse. On peut aussi noter que le calcul de  $\delta h$  nécessite d'avoir effectué l'homogénéisation du lit de grains en une phase granulaire équivalente décrite de façon continue (*i.e.* à l'aide de champs mésoscopiques).

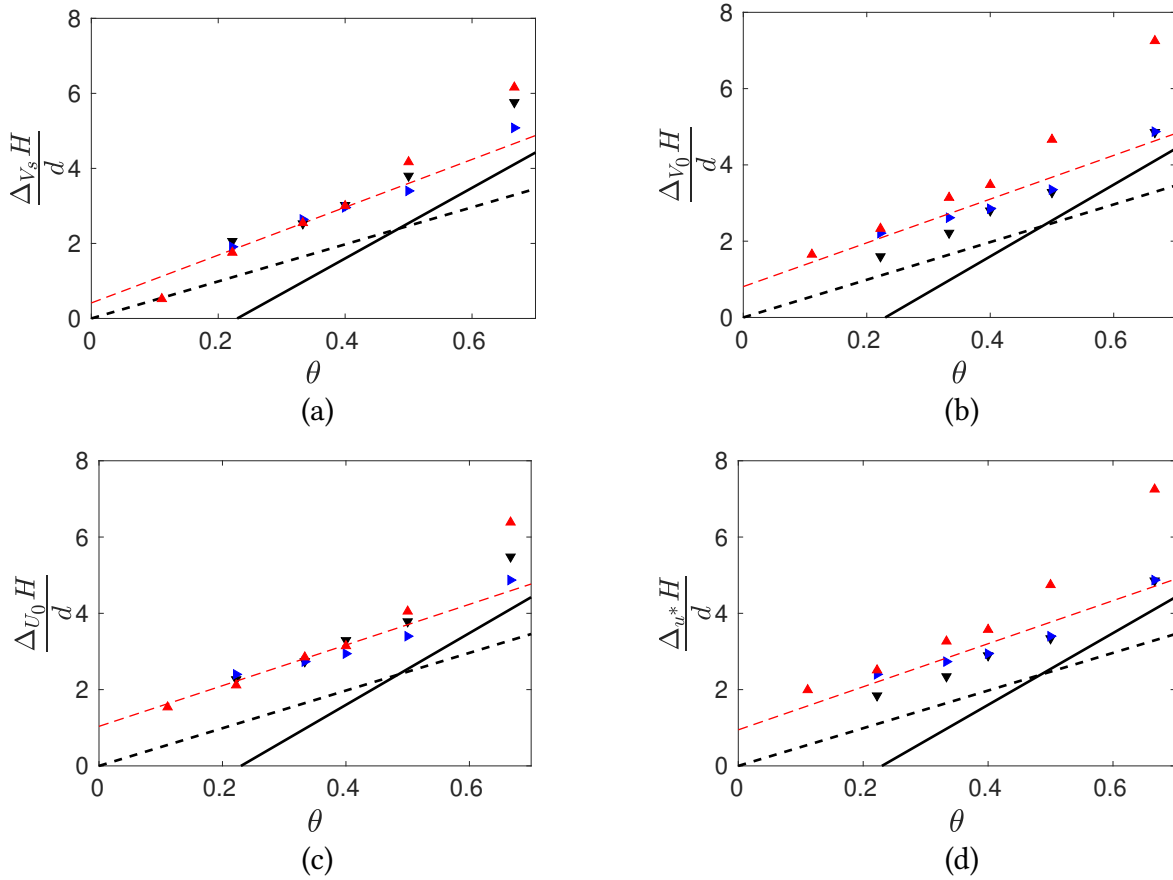
On pourrait aussi imaginer définir une épaisseur à l'aide des profils moyens de densité de particules (comme pour  $H_\phi$ ). Il faudrait alors choisir des seuils sur  $\phi$  afin de définir les positions du haut et du bas de la couche de grains mobiles. Mais alors, cette définition, en plus d'avoir recours à plusieurs seuils, dépendrait aussi de la façon de calculer  $\phi(y)$ . C'est le même problème que pour la définition de  $H_\phi$ , mais cette fois-ci, on s'intéresse aux "bords" de la fonction  $\phi(y)$ . Dans ces zones ( $\phi \ll 1$  et  $\phi_{max} - \phi \ll 1$ ), la méthode de calcul de la fraction volumique solide aura une plus grande incidence que pour des valeurs intermédiaires. Nous n'étudierons donc pas ici l'épaisseur caractéristique de la couche mobile ainsi définie.

On compare d'abord l'impact du choix de la vitesse seuil sur  $\Delta H$ . On note alors :

- $\Delta_{V_s} H$  l'épaisseur de la couche mobile dont le bas ( $H_b^{V_s}$ ) est repéré par  $u_p(H_b^{V_s}) = 0.02V_s$ ,
- $\Delta_{V_0} H$  l'épaisseur de la couche mobile dont le bas ( $H_b^{V_0}$ ) est repéré par  $u_p(H_b^{V_0}) = 1.36 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{\Delta \rho g d}{\rho_f}}$ ,

- $\Delta_{U_0}H$  l'épaisseur de la couche mobile dont le bas ( $H_b^{U_0}$ ) est repéré par  $u_p(H_b^{U_0}) = 1.67 \times 10^{-3} \dot{\gamma} d$ ,
- $\Delta_{u^*}H$  l'épaisseur de la couche mobile dont le bas ( $H_b^{u^*}$ ) est repéré par  $u_p(H_b^{u^*}) = 1.67 \times 10^{-3} \sqrt{\frac{\dot{\gamma} \eta_f}{\rho_f}}$ .

Les préfacteurs devant  $V_0$ ,  $U_0$  et  $u^*$  ont été choisis afin que l'épaisseur de la couche mobile soit la même qu'en prenant un seuil à 2% de la vitesse de Stokes pour le cas  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . La figure 4.8 présente les épaisseurs obtenues en fonction du nombre de Shields pour les trois valeurs de nombre de Reynolds particulières  $Re_p = 0.1$ , 1 et 10.



**FIGURE 4.8** – Épaisseur  $\Delta H$  de la couche mobile en utilisant un seuil basé sur la vitesse caractéristique : (a) :  $V_s$ ; (b) :  $V_0 \propto \sqrt{gd}$ ; (c) :  $\dot{\gamma}d$ ; (d) :  $u^*$ , en fonction du nombre de Shields et pour les nombres de Reynolds particulières ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ . (--) : modèle de MOUILLERON et al. (2009) (équation (4.11)); (–) : corrélation obtenue par BOUTELOUP (2017). (– · –) : ajustements d'équation (a) :  $\Delta_{V_s}H/d = 0.38 + 5.8\theta$ ; (b) :  $\Delta_{V_0}H/d = 0.83 + 5.7\theta$ ; (c) :  $\Delta_{U_0}H/d = 0.95 + 4.7\theta$ ; (d) :  $\Delta_{u^*}H/d = 0.95 + 5.6\theta$ .

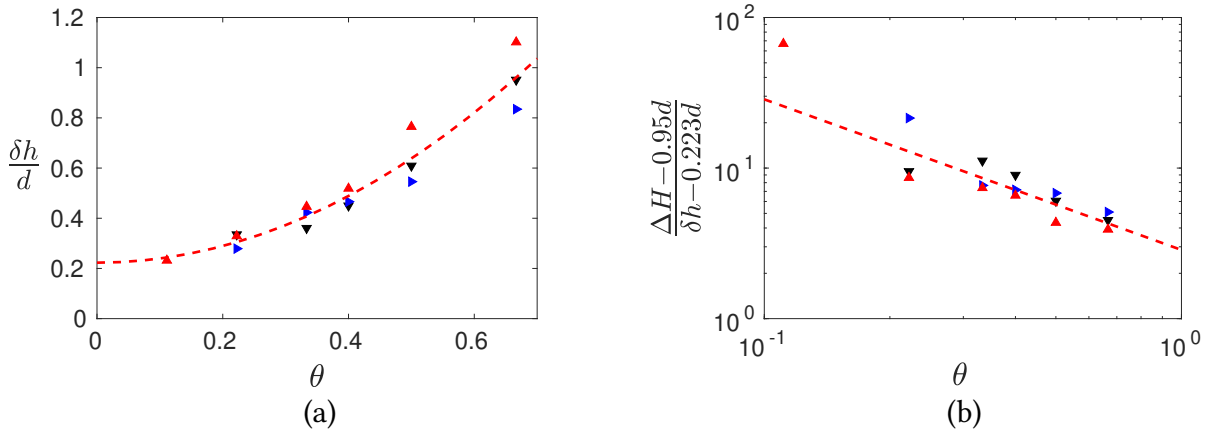
La figure 4.8 montre que, quelque soit la vitesse seuil utilisée, on obtient une épaisseur de couche mobile de grains qui est croissante avec le nombre de Shields  $\theta$ . Les épaisseurs obtenues avec la présente méthode sont plus grandes que celles prédites par le modèle de MOUILLERON et al. (2009) et que celles obtenues par BOUTELOUP (2017). Toutefois, l'épaisseur de la couche mobile semble bien varier linéairement et avec environ la même pente que dans le modèle de MOUILLERON et al. (2009) pour  $\theta \leq 0.4 - 0.5$  et puis, quand  $\theta$  augmente encore, on obtient une pente comparable à celle de BOUTELOUP (2017). Ce changement de pente peut avoir plusieurs causes. Il peut s'agir d'un changement de comportement du milieu granulaire (les effets inertiels, ou les chocs entre particules, qui

ne sont plus négligeables à grand nombre de Shields par exemple) mais cela peut aussi être dû à la taille relativement limitée du domaine simulé. Nous y reviendrons dans la section 4.3.3.

On compare maintenant les figures 4.8 (a), (b), (c) et (d) les unes avec les autres. On voit que les courbes correspondant aux différents nombres de Reynolds particuliers se superposent (pour  $\theta \leq 0.4 - 0.5$ ) sur les figures (a) et (c), mais pas pour les figures (b) et (d). Il semble donc que l'utilisation d'une vitesse seuil basée sur la vitesse de Stokes  $V_s$  ou sur la vitesse  $U_0 = \dot{\gamma}d$  soit plus judicieuse que d'utiliser  $V_0$  ou  $u^*$ . Pour trancher entre l'utilisation d'un seuil basé sur  $V_s$  ou  $\dot{\gamma}d$ , on peut simplement constater qu'on est en train de caractériser la mobilité des particules dans le sens de l'écoulement. Or la vitesse de Stokes  $V_s$  est une vitesse limite de chute et la vitesse  $U_0 = \dot{\gamma}d$  est la vitesse caractéristique du fluide au niveau du lit de grains. Il semble donc plus naturel d'utiliser  $\dot{\gamma}d$  comme vitesse caractéristique ici.

Que l'on choisisse un seuil de vitesse basé sur la vitesse de Stokes ou sur la vitesse  $U_0$ , on peut remarquer que  $\Delta H$  prend des valeurs supérieures à un diamètre dès le seuil de mise en mouvement (*i.e.*  $\Delta H$  ne s'annule ni au seuil de mise en mouvement ni pour  $\theta = 0$ ). On peut sans doute expliquer que  $\Delta H$  commence à une valeur non nulle par le fait que les particules ont une extension spatiale non nulle. L'épaisseur minimale de la couche de grains en mouvement est donc de l'ordre du diamètre de grain.

On compare désormais les épaisseurs de la couche mobile  $\delta h$  (équation (4.26)) et  $\Delta H$  (on utilisera  $\Delta_{U_0} H$  ici). La figure 4.9 (a) présente les valeurs prises par  $\delta h$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour les trois valeurs du nombre de Reynolds particulière  $Re_p = 0.1, 1$  et  $10$ . La figure 4.9 (b) présente l'évolution du rapport  $\Delta H/\delta h$ .



**FIGURE 4.9** – (a) : Épaisseur caractéristique de la couche de grains mobiles  $\delta h$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$ . (b) :  $(\Delta H - 0.95d)/(\delta h - 0.223d)$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$ ; la droite en pointillés rouge correspond au rapport des équations des ajustements de  $\Delta H$  et  $\delta h$  respectivement. Ces courbes sont tracées pour les nombres de Reynolds particuliers ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ . (–) : ajustement de nos données d'équation (a) :  $\delta h/d = 1.66\theta^2 + 0.223$ , (b) :  $(\Delta H - 0.95d)/(\delta h - 0.223d) = 2.86\theta^{-1}$ .

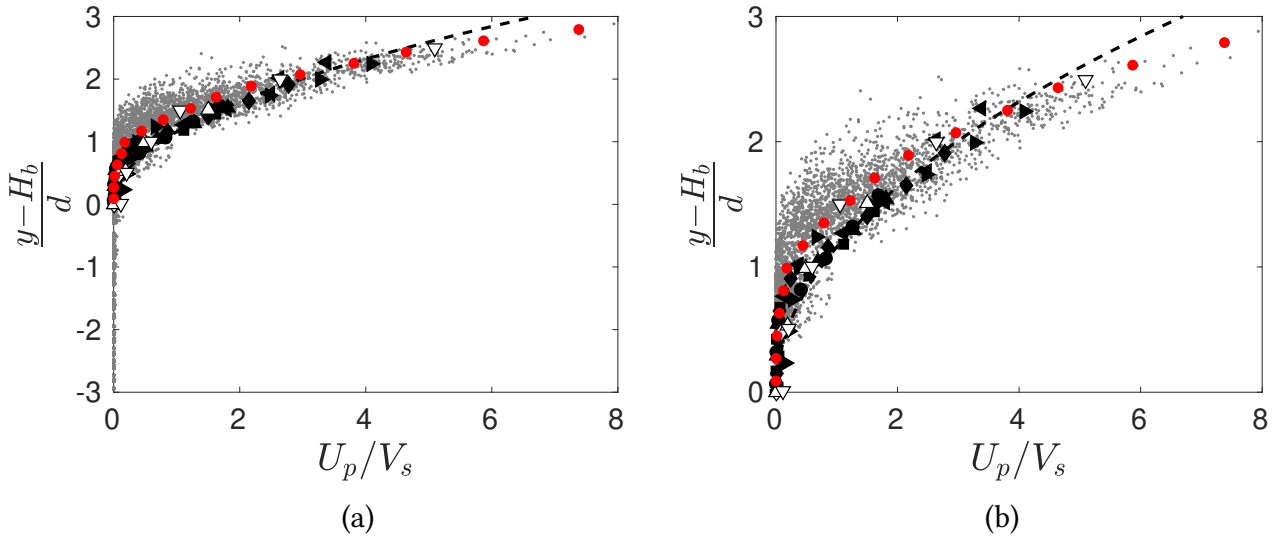
La figure 4.9 (a) montre que  $\delta h$  est presque indépendant du nombre de Reynolds particulière  $Re_p$  et croît de façon quadratique avec le nombre de Shields  $\theta$ . Cette dépendance en  $\theta^2$  de  $\delta h$  alors que  $\Delta H$  varie linéairement avec  $\theta$  fait que le rapport  $\Delta H/\delta h$  ne peut pas être constant par rapport à  $\theta$ . On estime la valeur de ce rapport dans l'annexe E. Sur la figure 4.9 (b), on trace  $(\Delta H - 0.95d)/(\delta h - 0.223d)$  en fonction du nombre de Shields. On retranche les ordonnées à l'origine de leur ajustement à  $\Delta H$  et  $\delta h$  avant d'en faire le rapport pour s'assurer de la pertinence de leur dépendance respectivement linéaire et quadratique avec le nombre de Shields. Dans l'ensemble, les points sont plutôt bien alignés le long d'une droite de pente  $-1$  en échelle  $\log\text{-}\log$ . Ce résultat sur la dépendance quadratique de  $\delta h/d$  vis-à-vis de  $\theta$  est assez inattendu, en effet, DURÁN *et al.* (2012) observent une dépendance linéaire de  $\delta h/d$  avec  $\sqrt{\frac{\theta}{\theta_c}}$ . Ils observent cette tendance pour  $\sqrt{\frac{\theta}{\theta_c}} \in [1, 2]$ , donc pour  $\theta \in [0.12, 0.48]$  mais ils



obtiennent ce résultat à des nombres de Reynolds particuliers plus élevés (et non constants). En effet, ils utilisent la définition suivante du nombre de Reynolds  $Re_{V_0}$  basé sur la vitesse  $V_0 = \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_f}gd}$  et le fixe à  $Re_{V_0} = 10$  durant leurs simulations. On remarque que  $Re_{V_0} = \frac{\rho d V_0}{\eta_f} = \frac{\rho d}{\eta_f} \sqrt{\frac{\Delta\rho}{\rho_f}gd} = \sqrt{\frac{Re_p}{\theta}}$ , donc se placer à  $Re_{V_0}$  constant et faire varier le nombre de Shields  $\theta$ , revient à avoir un nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  qui varie aussi. Dans ce cas, il varie linéairement avec  $\theta$  entre  $Re_p = 12$  pour  $\sqrt{\frac{\theta}{\theta_c}} = 1$  et  $Re_p = 48$  pour  $\sqrt{\frac{\theta}{\theta_c}} = 2$ .

### 4.3.3 Profils de vitesse des particules

On va maintenant se pencher sur le profil de vitesse des particules. MOUILLERON *et al.* (2009) ont dérivé analytiquement une expression du profil de vitesse qui est donné par l'équation (4.12). Cette relation donne une vitesse des particules dont l'échelle caractéristique est la vitesse de Stokes et qui varie de façon quadratique avec  $y$ . Pour  $Re_p = 0.1$  et  $\theta = 0.4$ , on trace les vitesses de nos particules en fonction de leur altitude (pour tous les instants du régime stationnaire servant au calcul des grandeurs moyennées) sur la figure 4.10, en prenant  $H_b$  comme origine des ordonnées. Ici, on utilise  $H_b^{V_s}$  car l'échelle de vitesse est la vitesse de Stokes  $V_s$  (et que  $H_b^{V_s}$  prend des valeurs proches de celles de  $H_b^{U_0}$ , qui serait l'altitude que l'on aurait utilisée si nous n'avions pas d'indication quant à la vitesse caractéristique à considérer ici). On a également calculé la vitesse moyenne des particules en fonction de leur altitude via une méthode "simple" de prise de moyenne volumique avec 16 sous-domaines équitablement répartis sur l'épaisseur de la couche de grains mobiles (ils ont donc une épaisseur de  $0.2d$  environ ; pour une description de la méthode de prise de moyenne, voir la section 5.2.1.2). On compare alors nos données au profil analytique de MOUILLERON *et al.* (2009) et aux résultats des simulations de BOUTELOUP (2017) et DERKSEN (2011) pour des nombres de Shields  $\theta$  compris entre 0.2 et 0.64 et un nombre de Reynolds particulaire  $Re_p = 0.5$ .



**FIGURE 4.10** – Profils de vitesse de grains dans le sens de l’écoulement. La figure (b) est un zoom de la figure (a). Le nuage de points gris ( $\cdot$ ) correspond à nos résultats pour  $Re_p = 0.1$ ,  $\theta = 0.5$  et  $r = 2.5$  (un point par particule et par instant du régime stationnaire utilisé pour calculer les grandeurs moyennes) et les ronds rouges ( $\bullet$ ) correspondent à la moyenne des points gris (moyenne volumique "simple" avec 16 sous-domaines équitablement répartis sur la couche mobile). Les marqueurs noirs correspondent aux résultats de BOUTELOUP (2017) pour  $Re_p = 0.48$  et  $r = 4$  ( $\bullet$  :  $\theta = 0.20$ ,  $\blacksquare$  :  $\theta = 0.25$ ,  $\blacklozenge$  :  $\theta = 0.30$ ,  $\blacktriangle$  :  $\theta = 0.35$ ,  $\blacktriangleleft$  :  $\theta = 0.40$  et  $\blacktriangleright$  :  $\theta = 0.50$ ), les marqueurs blancs correspondent aux simulations de DERKSEN (2011) pour  $Re_p = 0.5$  et  $r = 4$  ( $\diamond$  :  $\theta = 0.20$ ,  $\triangle$  :  $\theta = 0.42$  et  $\nabla$  :  $\theta = 0.64$ ). La courbe en pointillés noirs (--) correspond au profil parabolique du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) (équation (4.12)).

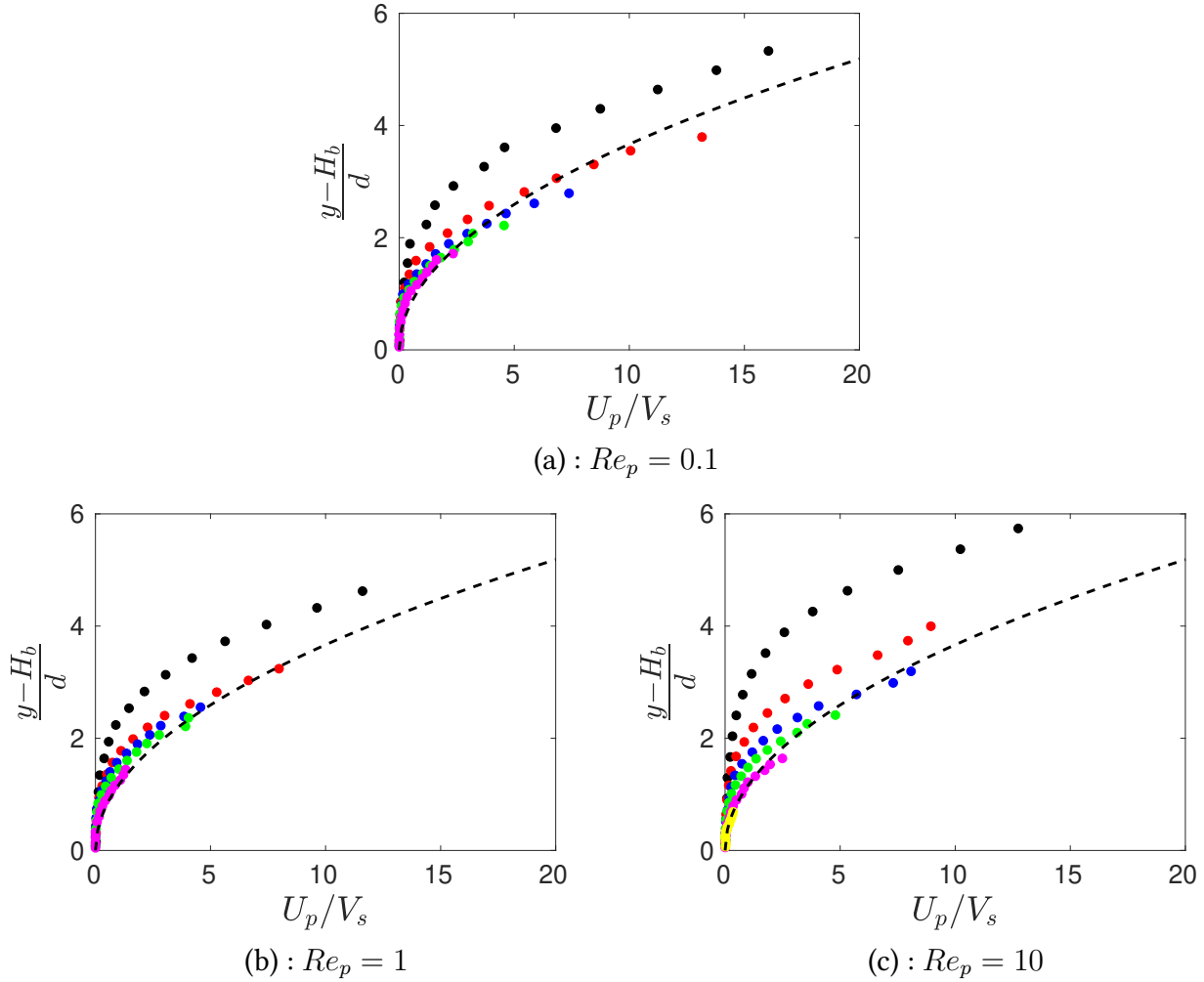
Sur la figure 4.10 (a), les particules ont une vitesse nulle jusqu’à la hauteur  $H_b$ , après quoi leur vitesse augmente rapidement avec l’altitude jusqu’au sommet du lit de grains (en  $y = H_m$ ). On obtient un bon accord avec les résultats de DERKSEN (2011) et de BOUTELOUP (2017) pour tous les nombres de Shields considérés (voir figure 4.10(b)) à l’exception de la vitesse maximale des grains. En effet, si on compare nos résultats (nuage de points gris ( $\cdot$ ) et les ronds rouges ( $\bullet$ )) à ceux de BOUTELOUP (2017) (pour  $Re_p = 0.5$ ,  $\theta = 0.4$  et  $r = 4$ , marqueurs ( $\blacktriangleleft$ ) sur la figure 4.10), l’accord des profils est presque quantitatif mais la vitesse maximale qu’il obtient est d’environ  $3.5V_s$  alors que notre vitesse maximale est de l’ordre de  $7.5V_s$  ici. On peut noter que BOUTELOUP (2017) n’utilise pas non plus de modèle de lubrification et que DERKSEN (2011) (qui lui utilise un modèle de fermeture pour les effets de lubrification dans la direction normale lors des chocs entre particules) obtient une vitesse maximale de  $1.5V_s$  pour le même jeu de paramètres ( $Re_p = 0.5$ ,  $\theta \simeq 0.4$  et  $r = 4$ ). Cela laisse penser que les écarts sur la vitesse maximale sont (au moins en partie) dus à la prise en compte, ou non, des effets de lubrification. Ce point sera rapidement abordé dans la section 4.4. Si maintenant on compare nos résultats à la relation analytique de MOUILLERON *et al.* (2009) (équation (4.12)), on obtient des vitesses au fond de la couche mobile qui y sont légèrement inférieures (tout comme les résultats de DERKSEN et BOUTELOUP) et elles sont légèrement supérieures à la prédiction analytique dans le haut de la couche mobile.

À partir de maintenant, pour des raisons clarté, nous ne tracerons que les profils moyens de vitesse des particules obtenus via la méthode de changement d’échelle par prise de moyenne "simple" (voir annexe 5.2.1.2 pour le détail de la méthode) avec 16 sous-domaines de même taille répartis sur l’épaisseur de la couche de grains mobiles, et nous ne traçons plus l’ensemble du nuage de points permettant le calcul de ces profils moyens.

Finalement, on peut noter que l’accord sur l’ensemble de la couche mobile entre la vitesse des particules et le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) est remarquable car on obtient des vitesses maximales très élevées comparées aux autres résultats présentés et nous n’utilisons pas de modèle de lubrifica-

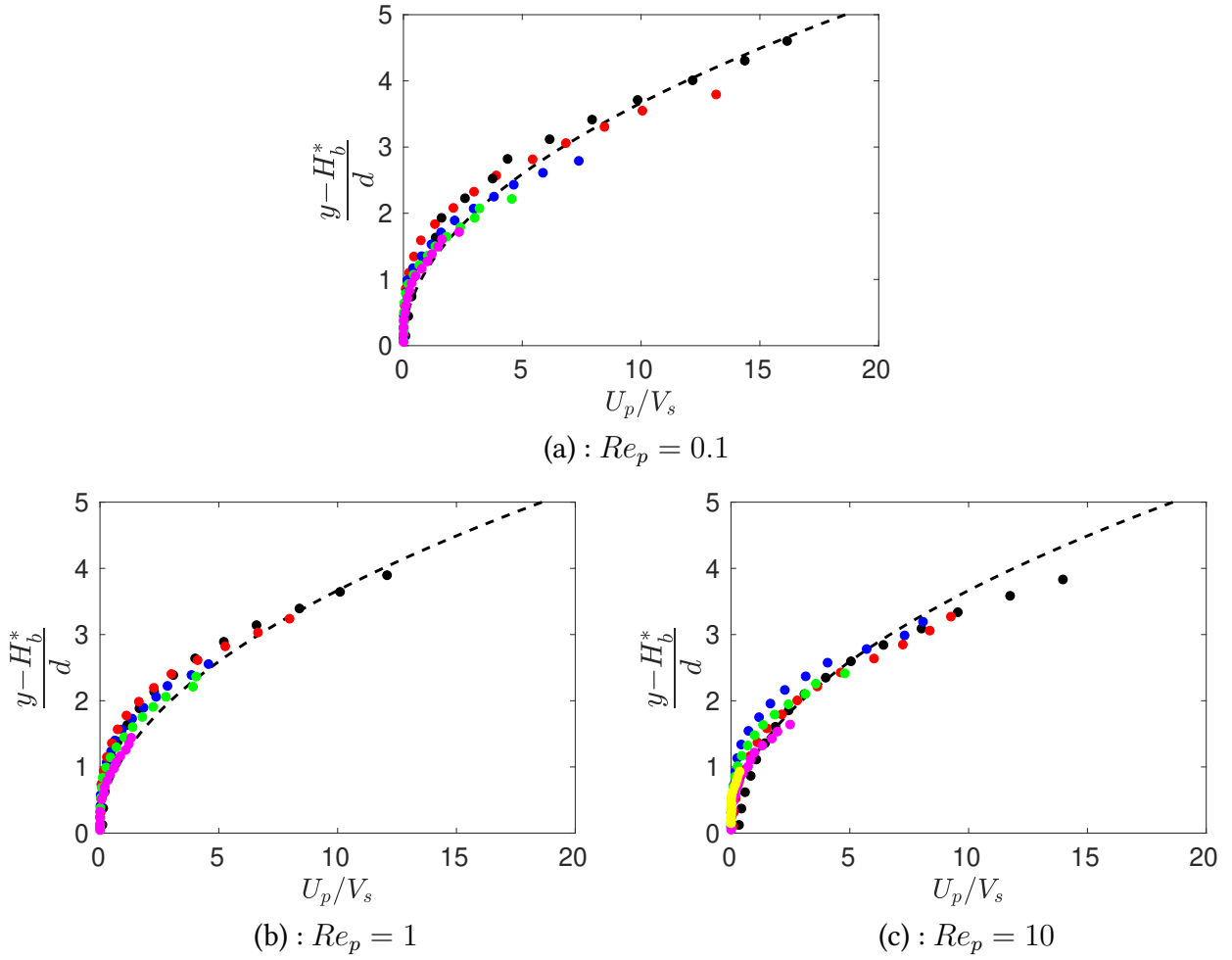
tion ici alors que les expériences de MOUILLERON-ARNOULD (2002) et CHARRU *et al.* (2004) ne peuvent pas s'affranchir de ses effets.

On compare désormais les profils de vitesse granulaire pour les différents paramètres adimensionnels. De la même façon que pour la figure 4.10, on trace les vitesses moyennes des grains en fonction de leur altitude. On obtient alors les figures 4.11 (a), (b) et (c) respectivement pour les nombres de Reynolds particuliers de 0.1, 1 et 10. On a aussi tracé le profil parabolique dont l'expression est donné par l'équation (4.12).



**FIGURE 4.11** – Profils de vitesse des grains adimensionnée par la vitesse de Stokes pour (a) :  $Re_p = 0.1$ , (b) :  $Re_p = 1$  et (c) :  $Re_p = 10$  ( $\bullet$  :  $\theta = 0.66$ ,  $\bullet$  :  $\theta = 0.50$ ,  $\bullet$  :  $\theta = 0.40$ ,  $\bullet$  :  $\theta = 0.33$ ,  $\bullet$  :  $\theta = 0.22$  et  $\bullet$  :  $\theta = 0.11$ ). (- -) : profil parabolique du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) (équation (4.12)).

On constate que, pour tous les nombres de Reynolds particuliers considérés, il y a un relativement bon accord entre le profil parabolique de MOUILLERON *et al.* (2009) (équation (4.3.3)) et nos données pour  $\theta \leq 0.4$ . C'était aussi le cas lors des expériences de CHARRU *et al.* (2004). On remarque également que la vitesse maximale atteinte est presque indépendante du nombre de Reynolds. Les variations observées sont faibles, dépendent du nombre de Shields et ne sont pas monotones par rapport à  $Re_p$ . On peut essayer de modifier l'origine  $H_b$  du profil parabolique pour les grandes valeurs de  $\theta$  afin de réunir les différentes courbes en une seule. On a donc modifié "à la main" les valeurs de  $H_b$  pour  $\theta = 0.50$  et  $0.67$  et on appelle  $H_b^*$  cette version corrigée de  $H_b$ . On obtient ainsi les profils de vitesse granulaire tracés sur la figure 4.12.

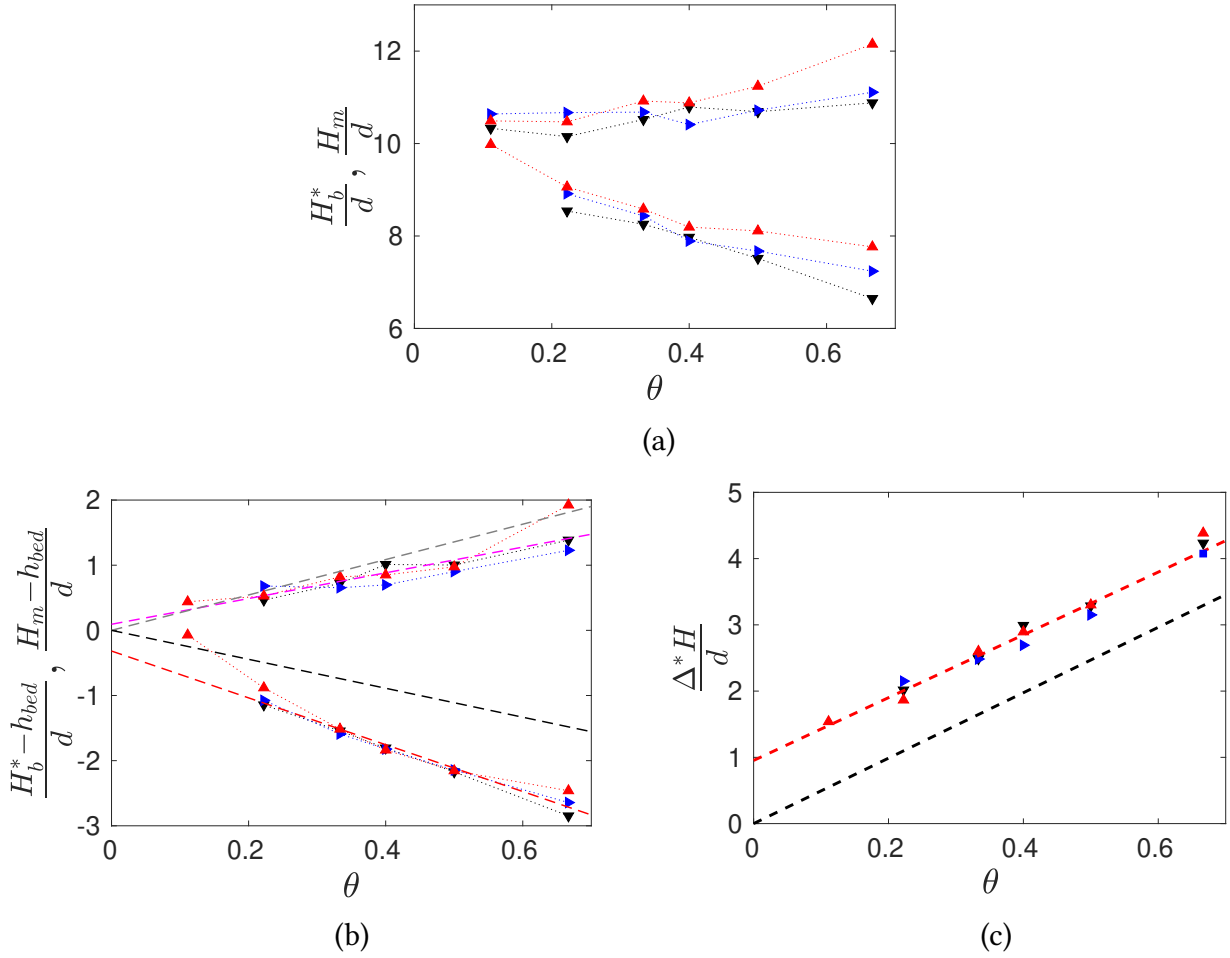


**FIGURE 4.12** – Même légende que la figure 4.11 en prenant  $H_b^*$  comme origine.

Les profils se superposent tous et semblent être bien décrits par une portion de parabole. Cela signifie que c'est la valeur de  $H_b$  qui ne convient pas pour les grandes valeurs de  $\theta$  (contrairement à  $H_b^*$ ), le profil de vitesse garde la même forme et est donc tout de même bien décrit par l'équation (4.12).

#### 4.3.3.1 Retour sur l'épaisseur de la couche mobile

Maintenant que nous avons modifié les valeurs de  $H_b$  pour  $\theta = 0.5$  et  $\theta = 0.67$ , on trace les nouvelles valeurs de l'altitude du bas de la couche mobile ( $H_b^*$ ) en fonction du nombre de Shields sur la figure 4.13 (a). On trace aussi  $H_b^* - h_{bed}$  en fonction de  $\theta$  sur la figure 4.13 (b) et on trace les nouvelles valeurs de  $\Delta^* H$  qui y sont associées en fonction de  $\theta$  sur la figure 4.13 (c) (On trace uniquement  $H_b^{U_0}$  et  $\Delta_{U_0} H$  où  $U_0 = \dot{\gamma}d$ , l'astérisque signifiant qu'il s'agit des valeurs corrigées).



**FIGURE 4.13** – Hauteurs et épaisseur de la couche de grains mobiles en fonction de  $\theta$ , en prenant la version corrigée  $H_b^*$  de la hauteur du bas de la couche mobile. Figure (a) :  $H_m$  et  $H_b^*$ . Figure (b) :  $H_m - h_{bed}$  et  $H_b^* - h_{bed}$ ; (—) : modèle de MOUILLERON et al. (2009) (équation (4.14)); (---) : modèle de MOUILLERON et al. (2009) (équation (4.24)); (- -) : ajustement d'équation  $\frac{H_b^* - h_{bed}}{d} = -4.50\theta - 0.32$ ; (- -) : ajustement d'équation  $\frac{H_m - h_{bed}}{d} = 1.97\theta + 0.09$ . Figure (c) :  $\Delta^* H/d = (H_m - H_b^*)/d$ ; (---) : modèle de MOUILLERON et al. (2009) (équation (4.11)); (- -) : ajustement d'équation  $\frac{\Delta^* H}{d} = 4.74\theta + 0.95$ . Pour les nombres de Reynolds particulière ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ .

La figure 4.13 (a) montre que les corrections "à la main" de  $H_b$  ont permis d'effacer les fortes variations de  $H_b$  pour  $\theta \geq 0.4$  et cette altitude semble désormais bien mieux décrite par une variation linéaire avec  $\theta$  que précédemment (voir la figure 4.7). Si on prend maintenant  $h_{bed}$  comme origine de l'axe des ordonnées, les courbes se superposent sur deux droites (figure 4.13 (b)). On peut noter que ce n'est le cas que si l'on prend  $h_{bed}$  comme origine; c'était la seule définition prenant en compte les effets du nombre de Reynolds particulière. On remarque que les ajustements linéaires de  $H_m$  et  $H_b$  ne passent pas par 0 pour  $\theta = 0$  contrairement au modèle de MOUILLERON et al. (2009). Les pentes sont toutefois proches de celles obtenues lors de cette étude. Si on y associe des valeurs de  $\bar{\phi}$  et  $\mu$  comme précédemment, on obtient  $\bar{\phi} \simeq 0.413$  et  $\mu = 0.464$ . Ces valeurs permettent (dans le cadre du modèle) d'obtenir la pente  $\frac{d\Delta H}{d\theta} = 5.22d$  alors qu'un ajustement sur nos données mène à  $5.68d$ . L'écart entre ces deux valeurs est inférieur à 10%.

La figure 4.13 (c) présente l'épaisseur de la couche de grains mobiles en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour les trois valeurs du nombre de Reynolds particulière testées  $Re_p = 0.1, 1$  et  $10$ . On peut voir que la correction de  $H_b$  pour les grandes valeurs de  $\theta$  a permis la superposition des trois courbes en une seule, même pour les valeurs élevées du nombre de Shields  $\theta$ . On obtient alors

une pente de 4.74 qui est très proche la valeur de  $1/(\bar{\phi}\mu) \simeq 4.93$  obtenue à l'aide du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009).

Il semble que  $H_b$  doive être définie autrement qu'avec une vitesse seuil, et ce quelque soit la vitesse caractéristique utilisée pour fabriquer ce seuil. L'utilisation d'un seuil basé sur la vitesse caractéristique  $\theta^2 V_s$  ne permet pas non plus de définir  $H_b$  de telle sorte qu'elle dépende linéairement de  $\theta$  sur l'ensemble de la plage explorée (la justification de l'utilisation de cette vitesse caractéristique est donnée ci-après, dans cette section ; figure 4.14 et équation (4.29)). Nous n'avons pas trouvé de moyen de définir cette hauteur de façon générale mais son évolution avec le nombre de Shields doit être linéaire afin que les profils de vitesse granulaire puissent être comparés avec une "origine commune". Les difficultés pour obtenir des hauteurs  $H_b$  qui varient linéairement sont sans doute attribuables à la faible taille du domaine de simulation ; le domaine ne fait que  $L_x \times L_z = 4d \times 4d$  dans le plan horizontal. Des couches de grains se forment, les particules sont préférentiellement disposées à certaines altitudes mais peu de particules se trouvent entre ces couches. Ce phénomène est visible sur le nuage de points gris de la figure 4.10 où une couche de grains s'est formée pour  $y - H_b \simeq 0.75 \pm 0.5d$ . On voit que les grains peuvent prendre des vitesses plus élevées en  $y - H_b \simeq 0.75d$  (au milieu de la couche) qu'en  $y - H_b \simeq 1.25d$  (entre deux couches). Ce comportement des particules se prête mal à l'utilisation d'une vitesse seuil pour définir le bas de la couche mobile. On ne pourra alors mesurer que des hauteurs dans les couches de grains mais on n'obtiendra jamais de hauteurs entre les couches de grains, là où la vitesse moyenne des particules est plus faible. Cet organisation en couche des grains du lit est d'autant plus présente que l'épaisseur sur laquelle les grains sont transportés est grande et donc que le nombre Shields est élevé.

Pour en conclure avec les altitudes caractéristiques du lit de grains, les hauteurs  $H_b$  et  $H_m$  augmentent linéairement avec  $\theta$  et augmentent aussi légèrement avec le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ . L'utilisation de  $h_{bed}$  comme origine de l'axe des ordonnées permet de prendre en compte la dépendance avec le nombre de Reynolds particulaire. En supposant  $h_{bed}$  indépendant du nombre de Shields, on obtient l'ajustement

$$\frac{h_{bed}}{d} \simeq D \cdot \ln(Re_p) + \frac{h_{bed}}{d}(Re_p = 1), \quad (4.27)$$

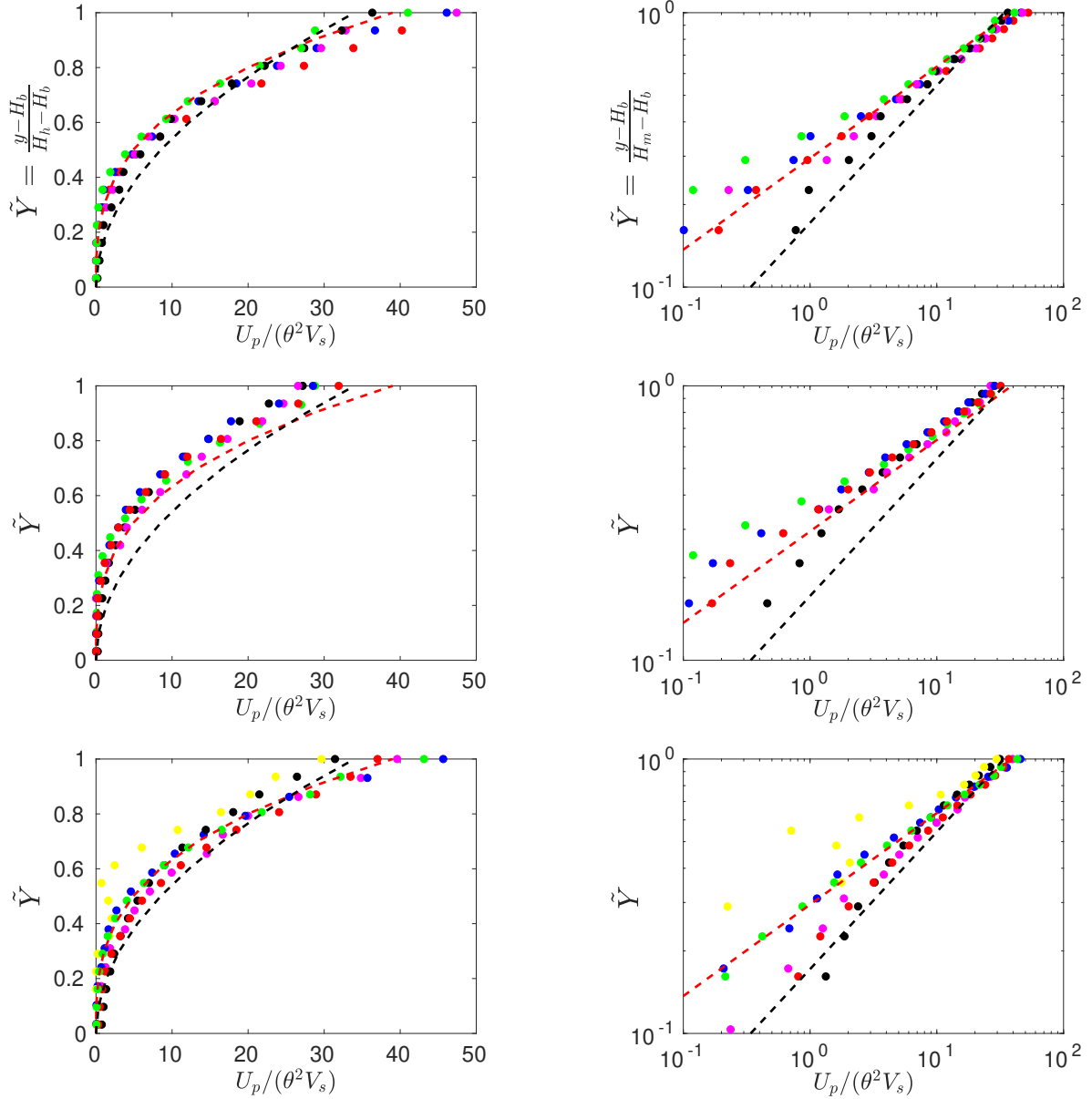
avec  $D = 9.0 \times 10^{-2}$  et  $h_{bed}(Re_p = 1) = 9.89d$ . Cet ajustement décrit la variation moyenne de  $h_{bed}$  avec le nombre de Reynolds particulaire mais cette grandeur dépend tout de même fortement de l'organisation des grains au sein du lit. Finalement, l'épaisseur de la couche de grains en mouvement varie linéairement avec le nombre de Shields et est indépendante du nombre de Reynolds particulaire.

#### 4.3.3.2 Profil universel de vitesse granulaire

On veut aller plus loin dans l'étude des profils de vitesse moyenne des grains et essayer d'obtenir une courbe universelle permettant de décrire ces profils, quelque soit la valeur des paramètres sans dimension  $\theta$  et  $Re_p$ . La vitesse maximale des grains est atteinte pour  $y - H_b = H_m - H_b = \Delta H$ , or d'après l'équation (4.11),  $\Delta H \propto \theta$  donc  $\max(U_p/V_s) \propto \theta^2$ . On normalise alors la vitesse des particules par  $\theta^2 V_s$  au lieu de  $V_s$  et on la trace sur la figure 4.14 en fonction de  $\tilde{Y}$ , défini par :

$$\tilde{Y} = \frac{y - H_b}{H_m - H_b} \in [0, 1]. \quad (4.28)$$

Ainsi, tous les profils de vitesse granulaire devraient se superposer.



**FIGURE 4.14** – Profils verticaux de vitesse moyenne des grains, normalisée par  $\theta^2 V_s$ .

Même légende que pour les figures 4.11 et 4.12

avec (1<sup>ère</sup> ligne) :  $Re_p = 0.1$  ; (2<sup>ième</sup> ligne) :  $Re_p = 1$  ; (3<sup>ième</sup> ligne) :  $Re_p = 10$ ,

(colonne de gauche) : échelle linéaire et (colonne de droite) : échelle log-log.

(- -) : ajustement  $U_p/(\theta^2 V_s) = 34\tilde{Y}^2$  ; (- · -) : ajustement  $U_p/(\theta^2 V_s) = 39\tilde{Y}^3$ .

Sur les figures 4.14 (a), (b) et (c) (figures du haut, en échelle linéaire), les profils de vitesse se superposent quasiment pour tous les nombres de Shields  $\theta$  considérés. On peut noter que même pour  $\theta = 0.11$  et  $Re_p = 10$  (le seul cas au-dessus du seuil de mise en mouvement pour  $\theta = 0.11$ ), le profil renormalisé suit presque les autres profils alors qu'on est tout juste au-dessus du seuil de mise en mouvement. Dans le cadre du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009), on obtient le profil normalisé de vitesse suivant :

$$\frac{U_p(\tilde{Y})}{\theta^2 V_s} = \frac{9}{\mu \bar{\phi} \eta_r} \tilde{Y}^2, \quad (4.29)$$

pour  $\tilde{Y} \in [0, 1]$ . Si on effectue l'application numérique (avec les valeurs obtenues par CHARRU *et al.* (2004)), on obtient la vitesse maximale  $\frac{9}{\mu \bar{\phi} \eta_r} \theta^2 V_s \simeq 18 \theta^2 V_s$  or nous obtenons des vitesses

de l'ordre  $40 \theta^2 V_s$  ici. Afin d'y comparer nos données, nous ne traçons donc pas le profil donné par la relation (4.29) mais nous traçons tout de même un ajustement quadratique (en pointillés noirs) sur la figure 4.14. Sur la même figure, on trace également les profils de vitesse en échelle *log-log* (figures du bas). On constate alors que nos profils ne varient en fait pas comme  $\tilde{Y}^2$ ; un ajustement nous donne  $U_p(\tilde{Y})/\theta^2 V_s \simeq 39 \tilde{Y}^3$ . C'est la courbe que nous avons tracée en pointillés rouges sur les figures 4.14. Cet ajustement cubique décrit bien mieux les vitesses obtenues. Pour  $Re_p = 0.1$  ou 1, les courbes de vitesse obtenues suivent bien cette loi pour  $U_p(\tilde{Y})/\theta^2 V_s \geq 1$  et pour  $Re_p = 10$ , c'est plutôt pour  $U_p(\tilde{Y})/\theta^2 V_s \geq 5$  (à l'exception du cas  $\theta = 0.11$  pour lequel  $\Delta H$  est trop faible et fait apparaître les couches de grains sur le profil de vitesse). On peut remarquer que la courbe universelle décrivant les profils de vitesse obtenus ici est :

$$\frac{U_p(\tilde{Y})}{\theta^2 V_s} = 39 \tilde{Y}^3. \quad (4.30)$$

La relation (4.30) permet une bonne description des vitesses obtenues pour  $Re_p = 0.1$  et 10 mais, étrangement, elle les surestime légèrement pour  $Re_p = 1$ . Pour ce cas là (uniquement), les vitesses sont mieux décrites par la loi  $U_p(\tilde{Y})/\theta^2 V_s \simeq 27 \tilde{Y}^3$  (non représentée).

Finalement, bien que le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) donne de bonnes bases de travail et décrive plutôt bien le comportement du lit de grains, il semble tout de même trop simplifié pour réussir à capter tous les processus physiques mis en jeu ici. En effet, les variations d'épaisseur de la couche de grains mobiles sont bien décrites dans le cadre de ce modèle mais la valeur de cette épaisseur est sous estimée ici. On peut noter que pour un cas réel, avec des particules de taille non nulle, il est difficile de continuer à suivre la relation (4.11) lorsque  $\theta \rightarrow 0$ . On peut remarquer que l'ajustement obtenu prend la valeur  $\Delta H = d$  pour  $\theta = 0.114$  ce qui correspond environ au seuil de mise en mouvement du lit de grains. Cet effet de la taille des particules ne peut pas être pris en compte par un modèle ayant une description continue de la phase granulaire. De plus, nous obtenons des profils de vitesse de grains, adimensionnés par  $\theta^2 V_s$  qui sont cubiques et non quadratiques comme le prédit le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009).

Nous avons tenté d'expliquer ce profil cubique en modifiant le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009). Pour cela, on a considéré une fraction volumique de grains qui varie linéairement, au lieu d'être constante, dans la couche mobile afin de faire apparaître un terme en  $\tilde{Y}^2$  dans l'équation différentielle vérifiée par la vitesse (équation (4.8), en remplaçant  $\bar{\phi}$  par  $\phi(\tilde{Y}) = \phi_0(1 - \tilde{Y})$ ). Toutefois, cette tentative n'a pas abouti; elle mène à un profil de vitesse de la forme  $U_p(\tilde{Y})/\theta^2 V_s = A\tilde{Y}^2 - B\tilde{Y}^3$  (avec  $A, B \geq 0$ ) et pas  $U_p(\tilde{Y})/\theta^2 V_s = C\tilde{Y}^3$  (avec  $C \geq 0$ ).

### 4.3.4 Distributions de probabilité des vitesses des grains

#### 4.3.4.1 Distributions des vitesses dans le sens de l'écoulement

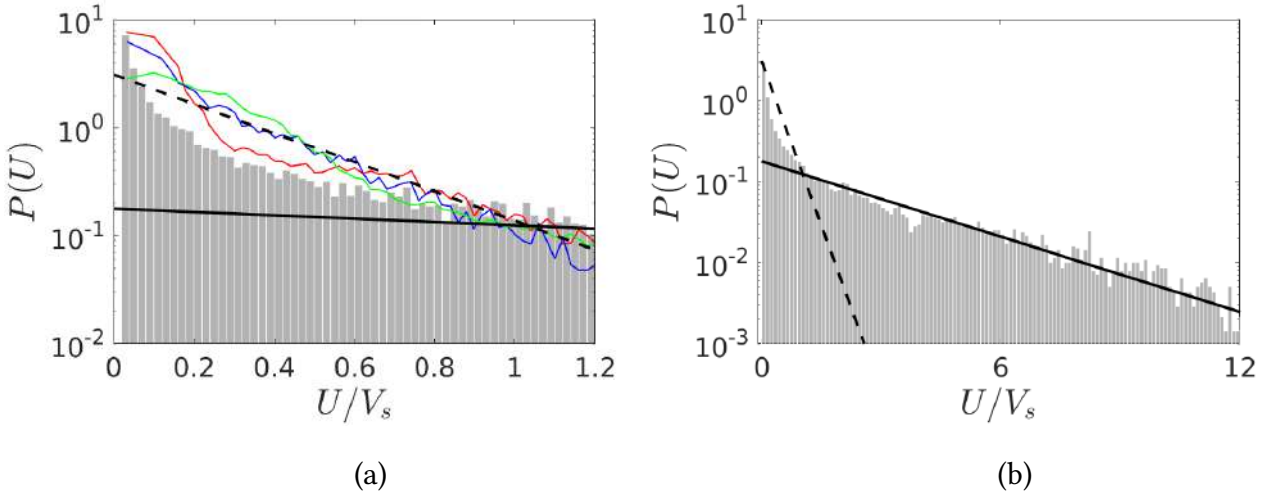
Dans la section précédente, nous avons regardé les profils moyens de vitesses des grains. Ici, nous considérons la répartition de ces vitesses au sein de la population de grains. Cette information est donnée par la densité de probabilité (ou probability density function (PDF) en anglais) des vitesses des particules. Lors de leurs expériences, CHARRU *et al.* (2004) ont observé que la vitesse des grains mobiles suivait une distribution exponentielle de loi de probabilité :

$$P(U) = \frac{1}{\bar{U}_p} e^{-\frac{U}{\bar{U}_p}}, \quad (4.31)$$

où  $P(U)$  est la probabilité qu'une particule prise au hasard (dans la couche de grains mobiles) ai la vitesse  $U$  et où  $\bar{U}_p$  est la vitesse moyenne associée à cette distribution de probabilité. CHARRU



*et al.* (2004) ont obtenue  $\bar{U}_p = 0.10\dot{\gamma}d$  pour  $\theta = 0.15, 0.18$  et  $0.24$  et  $Re_p = 0.19, 0.23$  et  $0.3$  respectivement. BOUTELOUP (2017) et DERKSEN (2011) ont également trouvés des distributions de probabilité relativement exponentielles des vitesses longitudinales des grains mobiles. Dans leur cas, l'échelle de vitesse est la vitesse de Stokes  $V_s$ . En effet, lors des expériences, CHARRU *et al.* (2004) font varier le nombre de Shields  $\theta$  en modifiant  $\dot{\gamma}$  (les autres paramètres restant constant) et ils obtiennent des vitesses dont l'échelle est  $\dot{\gamma}d$ ; BOUTELOUP (2017), DERKSEN (2011) ainsi que nous, faisons varier ce nombre sans dimension en modifiant l'accélération de la pesanteur  $g$  afin de le faire varier indépendamment du nombre de Reynolds particulaire. Cela implique que prendre la vitesse de Stokes (qui est proportionnelle à  $g$ ) comme échelle de vitesse des particules dans les simulations équivaut à prendre  $\dot{\gamma}d$  comme échelle de vitesse dans les expériences (DERKSEN (2011)). BOUTELOUP (2017) et DERKSEN (2011) obtiennent alors des PDF qui suivent la loi de probabilité (4.31) en prenant  $\bar{U}_p = 0.32 V_s$ . Pour calculer cette loi de probabilité, il faut se donner un critère de sélection entre grains statiques et mobiles. Ces auteurs ont fait le choix de distinguer ces deux classes de particules à l'aide d'une vitesse seuil : ne sont prises en compte que les particules dont la vitesse est supérieure à un seuil de vitesse  $\kappa V_s$  (avec  $\kappa \ll 1$ ) pour le calcul de la vitesse moyenne des grains mobiles. Il a été fixé à 2% de la vitesse de Stokes  $V_s$  par DERKSEN (2011). La figure 4.15 donne la distribution de vitesse avec l'utilisation de ce seuil pour le cas  $Re_p = 1, \theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . On y a également représenté la loi de probabilité exponentielle (4.31) pour  $\bar{U}_p = 0.32V_s$  en pointillés (- -) et pour  $\bar{U}_p = 3.65V_s$  en trait plein (-), ainsi que les distributions de vitesses obtenues par DERKSEN (2011). Notons qu'il ne faut pas prendre en compte les particules dont la vitesse est trop faible car cela aurait pour effet de décaler la vitesse moyenne des grains vers 0, et ce d'autant plus que le lit de grains considéré est profond.

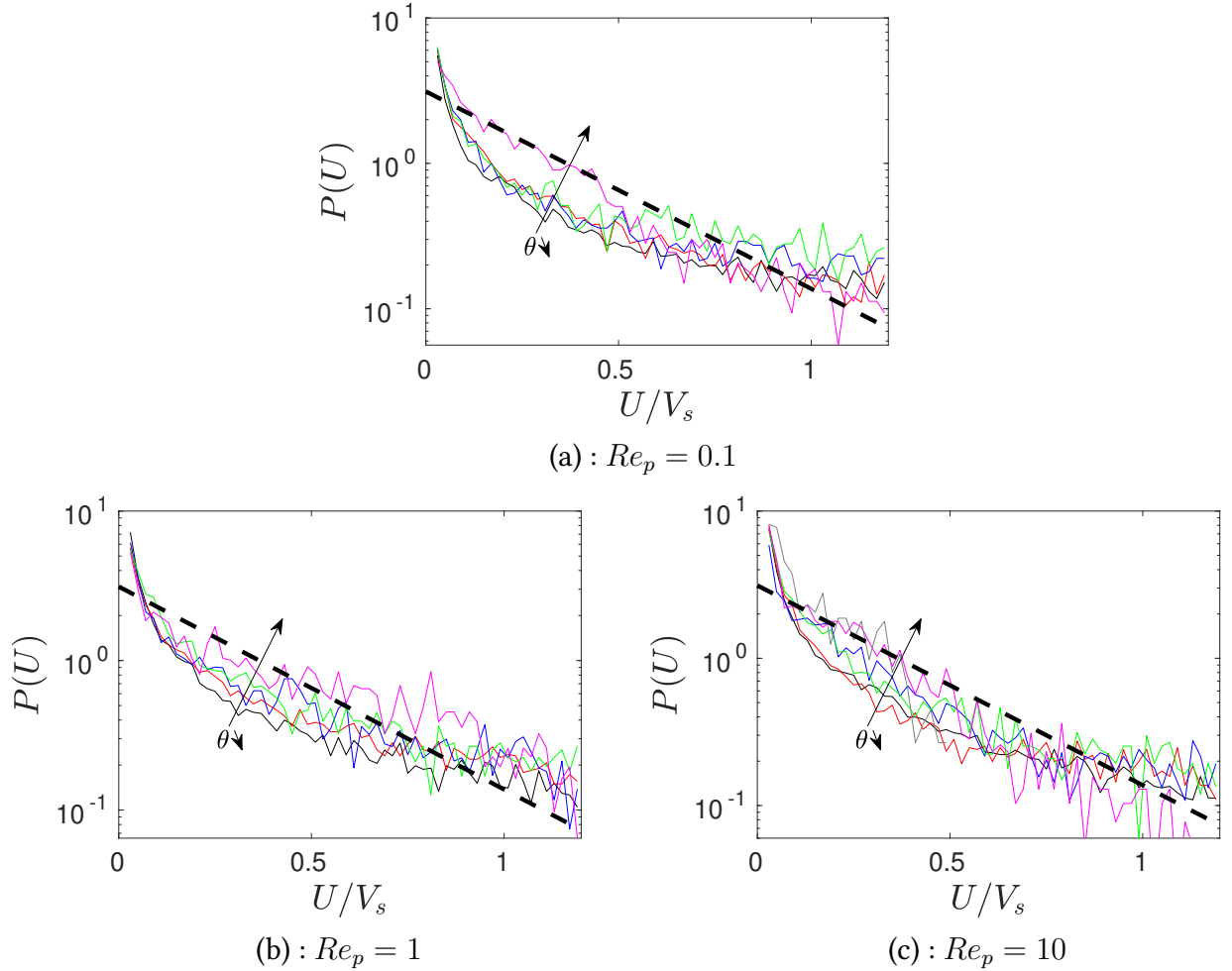


**FIGURE 4.15** – Distribution de probabilité des vitesses des particules dans le sens de l'écoulement pour (a) :  $0 \leq U/V_s \leq 1.2$ ; (b) :  $0 \leq U/V_s \leq 12$ . Les barres sont issues de la présente simulation ( $\theta = 0.67, Re_p = 1$  et  $r = 2.5$ ). Les courbes bleue (-), rouge (-) et verte (-) correspondent aux PDF obtenues par DERKSEN (2011) pour les nombres de Shields  $\theta = 0.15, 0.20$  et  $0.40$  respectivement ( $Re_p = 0.5, r = 4$ ). Trait pointillé (- -) : équation (4.31) avec  $\bar{U}_p = 0.32V_s$ ; trait plein (-) : équation (4.31) avec  $\bar{U}_p^{PDF} = 3.65V_s$ .

Sur la figure 4.15(a), la distribution exponentielle avec  $\bar{U}_p = 0.32V_s$  (courbe noire en pointillés) semble plutôt bien suivie, avec néanmoins un excès de particules de vitesse inférieure à  $0.1V_s$  et un défaut de particule ayant une vitesse comprise entre  $0.1V_s$  et  $0.9V_s$ , comme pour DERKSEN (2011) à  $\theta = 0.2$  (courbe rouge). Sur la figure 4.15 (b), on remarque qu'un grand nombre de particules ont une vitesse supérieure à  $V_s$  et il semble toutefois que la distribution est exponentielle pour les vitesses supérieures  $1.2V_s$ . Encore une fois, nos vitesses sont plus élevées que celles des expériences de CHARRU *et al.* (2004) ainsi que celles des simulations de DERKSEN (2011) (avec un modèle de lubrification pour la direction normale). Ces différences sur la distribution des vitesses peuvent être

attribuées soit à l'absence de prise en compte des effets de lubrification normaux (voir la section 4.4), soit à un nombre de Shields très élevé de  $\theta = 0.67$  en comparaison aux expériences de CHARRU *et al.* (2004) qui sont faites pour  $\theta \leq 0.24$  et aux simulations de DERKSEN (2011) qui n'a tracé des PDF que pour  $\theta \leq 0.4$ .

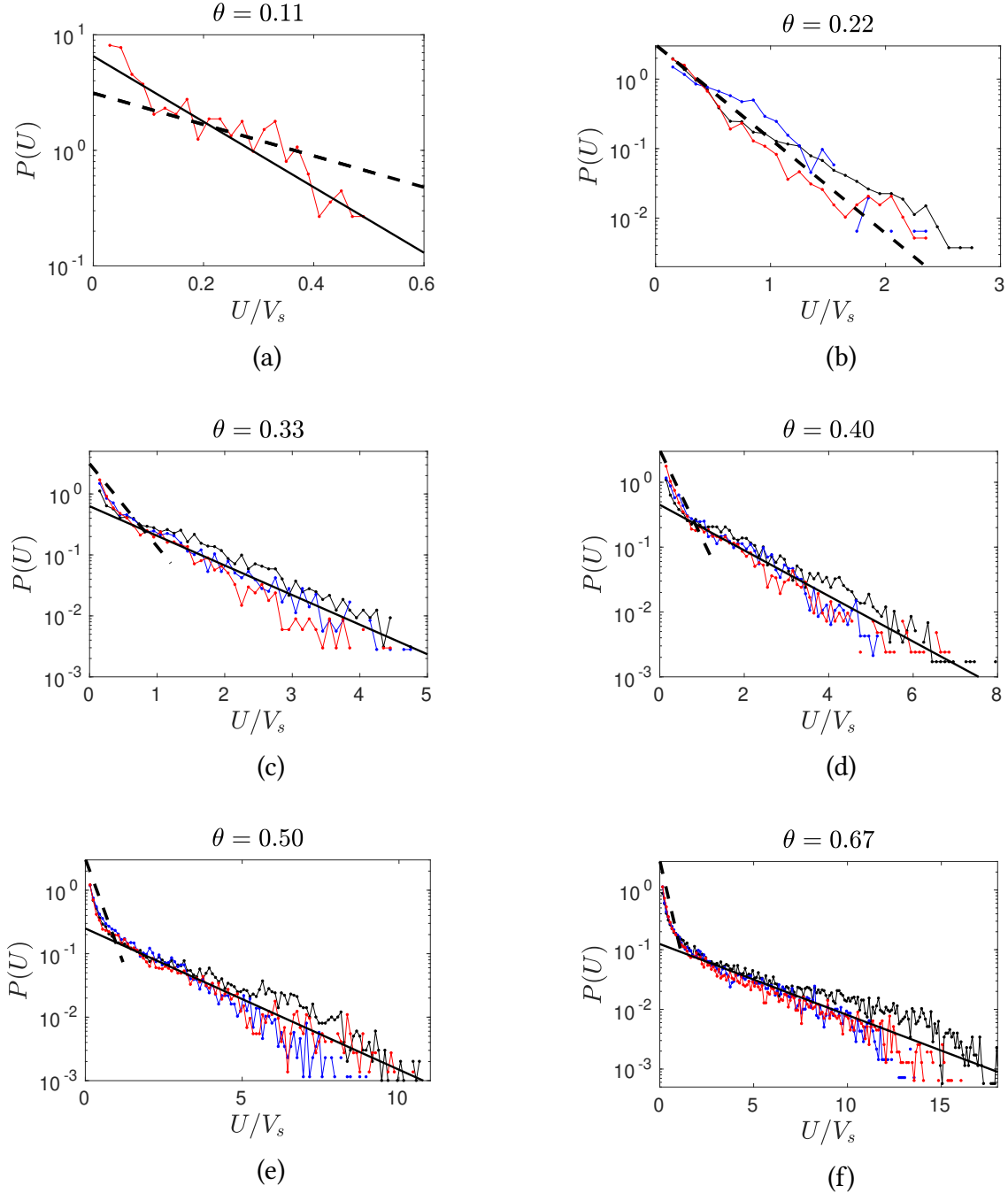
On trace maintenant sur la figure 4.16 les PDF des vitesses dans le sens de l'écoulement (en ne prenant en compte que les particules mobiles), adimensionnées par la vitesse de Stokes et pour tous les nombre de Shields considérés et pour les trois nombres de Reynolds particuliers  $Re_p = 0.1$ , 1 et 10.



**FIGURE 4.16** – Distributions des vitesses des grains dans le sens de l'écoulement pour  $U \leq 1.2V_s$  et pour (a) :  $Re_p = 0.1$ , (b) :  $Re_p = 1$  et (c) :  $Re_p = 10$ . (noir –) :  $\theta = 0.67$ ; (bleu –) :  $\theta = 0.50$ ; (rouge –) :  $\theta = 0.40$ ; (vert –) :  $\theta = 0.33$ ; (magenta –) :  $\theta = 0.22$ ; (gris –) :  $\theta = 0.11$  (pour la figure (c) uniquement). (– –) : distribution exponentielle (équation (4.31)) pour  $\bar{U}_p = 0.32V_s$ .

On constate que la description des PDF par la distribution exponentielle donnée par l'équation (4.31) avec  $\bar{U}_p = 0.32V_s$  est une bonne approximation pour les vitesses inférieures à  $1.2V_s$ . On observe les mêmes écarts à une distribution exponentielle pour tous les nombres de Reynolds particuliers  $Re_p$  et pour tous les nombres de Shields  $\theta$ , *i.e.* un excès de particules ayant une vitesse inférieure à  $0.1V_s$ , un défaut de particules ayant des vitesses comprises entre  $0.1V_s$  et environ  $V_s$  et un excès de particules ayant une vitesse supérieure à  $V_s$ . De plus, on peut noter que plus le nombre de Shields est faible, plus on se rapproche de la distribution exponentielle, et ce d'autant plus vite que le nombre de Reynolds particulière est élevé. Ces trois graphes ne montrent que la

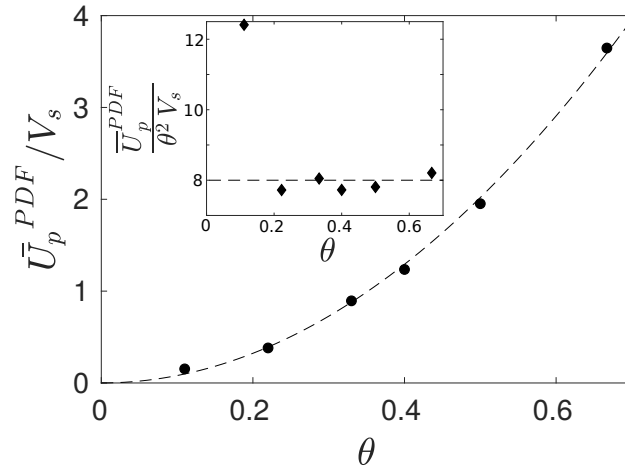
partie de la distribution des vitesses pour les vitesses inférieures à  $1.2V_s$ , on trace alors les PDF obtenues dans leur intégralité sur les figures 4.17 (a) à (f), respectivement pour les nombres de Shields  $\theta = 0.11, 0.22, 0.33, 0.4, 0.5, 0.67$ . On trace ces PDF avec un graphique par nombre de Shields et pas par nombre de Reynolds car on a vu dans la section 4.3.3 que la vitesse maximale des particules était indépendante du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ . On a tracé en pointillés la distribution exponentielle de l'équation (4.31) et en trait plein des distributions exponentielles avec des vitesses moyennes différentes, issues d'ajustements.



**FIGURE 4.17** – Distribution des vitesses des grains dans le sens de l'écoulement pour tout  $U/V_s$  et pour (a) :  $\theta = 0.11$ ; (b) :  $\theta = 0.22$ ; (c) :  $\theta = 0.33$ ; (d) :  $\theta = 0.40$ ; (e) :  $\theta = 0.50$ ; (f) :  $\theta = 0.67$ .

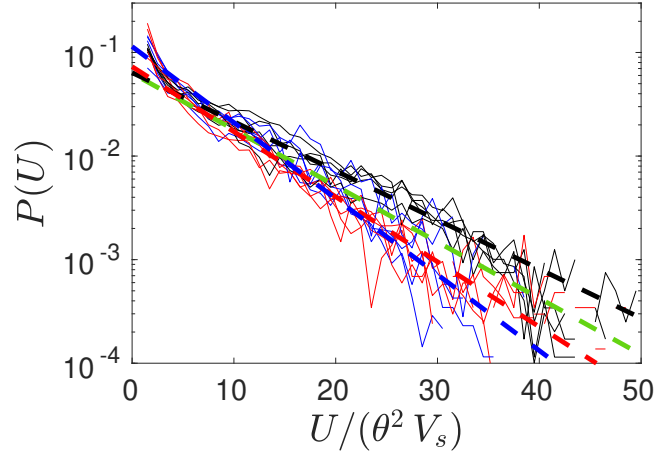
(noir -) :  $Re_p = 0.1$ ; (bleu -) :  $Re_p = 1$ ; (rouge -) pour  $Re_p = 10$ . On a également représenté la distribution donnée par l'équation (4.31), en pointillés noirs (- -) pour  $\bar{U}_p = 0.32V_s$  (pour  $0 \leq U/V_s \leq 1.2$ ) et en trait plein (-) pour la vitesse moyenne obtenue à l'aide d'ajustements des PDF par la même loi de probabilité exponentielle. Pour les nombres de Shields  $\theta \geq 0.33$ , on n'a pris en compte que les vitesses supérieures à la vitesse de Stokes lors de l'ajustement.

On peut d'abord noter qu'au premier ordre, non seulement la vitesse maximale atteinte est indépendante du nombre de Reynolds particulaire mais aussi la distribution des vitesses : les PDF se superposent sur chaque figure. On remarque qu'il y a plus de particules ayant une vitesse élevée pour les faibles nombres de Reynolds particuliers, et ce d'autant plus que le nombre de Shields est grand. On néglige cet effet du nombre de Reynolds particulaire ici mais nous le prendrons en compte dans la partie qui traite de la vitesse moyenne des particules (section 4.3.5). On s'intéresse désormais à la forme de ces distributions de vitesses de grains. Pour le nombre de Shields le plus bas,  $\theta = 0.11$ , on est sous le seuil de mise en mouvement sauf pour  $Re_p = 10$ . Et dans ce cas, la distribution exponentielle proposée par CHARRU *et al.* (2004) approxime bien la PDF obtenue pour  $U/V_s \in [0.1, 0.4]$  mais une distribution exponentielle de moyenne  $\bar{U}_p = 0.15V_s$  permet une bonne description de cette PDF sur l'ensemble des vitesses des particules. Pour  $\theta = 0.22$ , la distribution exponentielle de l'équation (4.31) avec  $\bar{U}_p = 0.32V_s$  décrit bien la distribution des vitesses obtenues sur l'ensemble de la plage de vitesses explorée ici. Puis, pour  $\theta \geq 0.33$ , la distribution exponentielle de CHARRU *et al.* (2004) ne permet une bonne description que pour les faibles vitesses de grains, typiquement pour  $U \leq V_s$ . Pour les vitesses de grains plus grandes, une description à l'aide d'une distribution exponentielle convient également mais la vitesse moyenne à considérer augmente alors avec le nombre de Shields.



**FIGURE 4.18** – Vitesse moyenne des particules mobiles  $\bar{U}_p^{PDF}$ , adimensionnée par la vitesse de Stokes, en fonction du nombre de Shields  $\theta$ . Ces vitesses sont obtenues à partir des ajustements visibles sur la figure 4.17. (- -) : ajustement d'équation  $\bar{U}_p^{PDF}/V_s = 8.0 \theta^2$ . Insert :  $\bar{U}_p^{PDF}/(\theta^2 V_s)$  en fonction de  $\theta$ .

Les vitesses moyennes ainsi obtenues sont données sur la figure 4.18. On observe une variation quadratique de la vitesse moyenne  $\bar{U}_p^{PDF}$ , adimensionnée par la vitesse de Stokes, avec le nombre de Shields  $\theta$ . On trace  $\bar{U}_p^{PDF}/(\theta^2 V_s)$  en fonction de  $\theta$  en insert de la figure 4.18. On remarque que tous les points sont situés à moins de 0.25 de la valeur 8 à l'exception du point pour  $\theta = 0.11$  qui prend la valeur 12.4. Cette valeur peut sembler grande comparée aux autres (50% d'écart) mais la vitesse moyenne est très faible pour cette valeur de  $\theta$  et cet écart de 50% correspond alors à une erreur qui n'est que d'environ  $0.08V_s$ . Ce résultat peut être mis en relation avec la variation linéaire de l'épaisseur de la couche mobile ainsi que celle du débit, qui elle est cubique. En effet,  $q \propto \Delta H \bar{U}_p$  et ainsi on aurait pu prévoir cette dépendance quadratique de la vitesse moyenne avec le nombre de Shields  $\theta$ . Le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) donne aussi une dépendance quadratique de la vitesse moyenne adimensionnée par la vitesse de Stokes (équation (4.16)). On peut donc tracer toutes les distributions des vitesses sur la même figure en adimensionnant cette vitesse par  $\theta^2 V_s$ , comme pour les profils de vitesse des grains (figure 4.19).



**FIGURE 4.19** – Distribution de vitesse des grains dans le sens de l'écoulement adimensionnée par  $\theta^2 V_s$ .

(noir —) :  $Re_p = 0.1$ , (bleu —) :  $Re_p = 1$ ; (rouge —) :  $Re_p = 10$ .

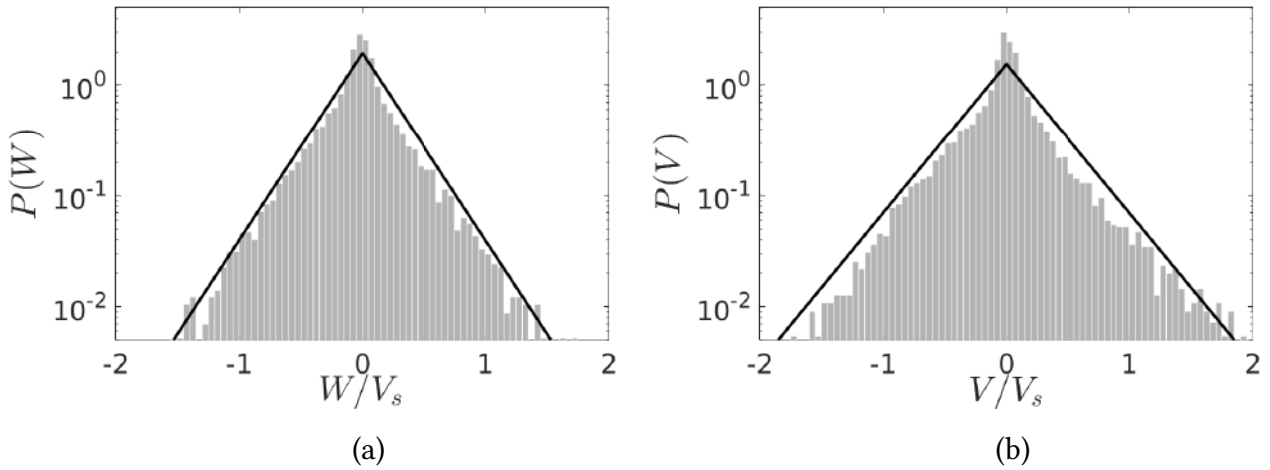
On n'a pas différencié les courbes correspondant aux différentes valeurs du nombre de Shields  $\theta$ .

(vert - -) : ajustement de l'ensemble des données disponibles ( $\bar{U}_p^{PDF} = 8.0 \theta^2 V_s$ ); (noir - -) : ajustement des données pour  $Re_p = 0.1$  ( $\bar{U}_p^{PDF} = 9.2 \theta^2 V_s$ ); (bleu - -) : ajustement des données pour  $Re_p = 1$  ( $\bar{U}_p^{PDF} = 5.9 \theta^2 V_s$ ); (rouge - -) : ajustement des données pour  $Re_p = 10$  ( $\bar{U}_p^{PDF} = 6.9 \theta^2 V_s$ ).

La figure 4.19 montre qu'au premier ordre les distributions de vitesses dans le sens de l'écoulement se superposent toutes (pour  $Re_p = 0.1, 1$  et  $10$  et  $\theta = 0.11, 0.22, 0.33, 0.40, 0.50$  et  $0.67$ ) si on utilise  $\theta^2 V_s = \theta \dot{\gamma} d$  comme échelle de vitesse. En fait, ces distributions semblent faiblement dépendre du nombre de Reynolds particulaire mais pas de façon monotone. Nos données sont trop bruitées pour en extraire une corrélation de la vitesse moyenne  $\bar{U}_p^{PDF} / \theta^2 V_s = f(Re_p)$ . Il est tout de même raisonnable d'avancer qu'elle est plus grande pour  $Re_p = 0.1$  que pour les valeurs plus élevées de ce paramètre sans dimension.

#### 4.3.4.2 Distributions des vitesses perpendiculaires à l'écoulement

On considère maintenant les distributions de vitesses des grains dans les directions verticale et transversale. CHARRU *et al.* (2004) ont mesuré la distribution de vitesses transversales et ont observé un bon accord avec une distribution gaussienne d'écart type  $\sigma_W \simeq 0.02 \dot{\gamma} d \simeq 0.086 V_s$  pour un nombre de Shields de  $\theta = 0.24$ . Les PDF des vitesses transversales  $W_p$  et verticales  $V_p$ , adimensionnées par la vitesse de Stokes, sont respectivement tracées sur la figure 4.20 (même seuil que pour la figure 4.15) pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ .



**FIGURE 4.20** – Distribution de probabilité des vitesses des particules (a) dans la direction transverse, (b) dans la direction verticale.  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . Les droites indiquent des distributions exponentielles (équations (4.32) et (4.33)).

Contrairement à CHARRU *et al.* (2004), nous n'obtenons pas une distribution gaussienne pour la vitesse transversale  $W_p$  (en échelle semi-logarithmique, une distribution gaussienne serait représentée par une parabole). On obtient des décroissances exponentielles de part et d'autre de la moyenne de vitesse (qui est nulle ici) ce qui correspond à une distribution exponentielle donnée par la loi de probabilité :

$$P(W) = \frac{1}{2\delta_W} \exp\left(-\frac{|W|}{\delta_W}\right), \quad (4.32)$$

où  $P(W)$  est la probabilité qu'une particule prise au hasard parmi les particules mobiles ait la vitesse transversale  $W$  et  $\delta_W$  est la largeur caractéristique de cette distribution de vitesses. On obtient un très bon accord pour  $\delta_W = 0.26V_s = 0.022\dot{\gamma}d$  (tracé en trait plein sur la figure 4.20(a)). Si on calcule l'écart-type associé à cette loi de probabilité, on obtient  $\sigma_W = \sqrt{2}\delta_W = 0.37V_s = 0.031\dot{\gamma}$ . Ce résultat est 1.6 fois supérieur à l'écart-type obtenu lors des expériences de CHARRU *et al.* (2004). Nous ne sommes pas au même nombre de Shields  $\theta$  or l'écart-type peut dépendre de la valeur de ce paramètre.

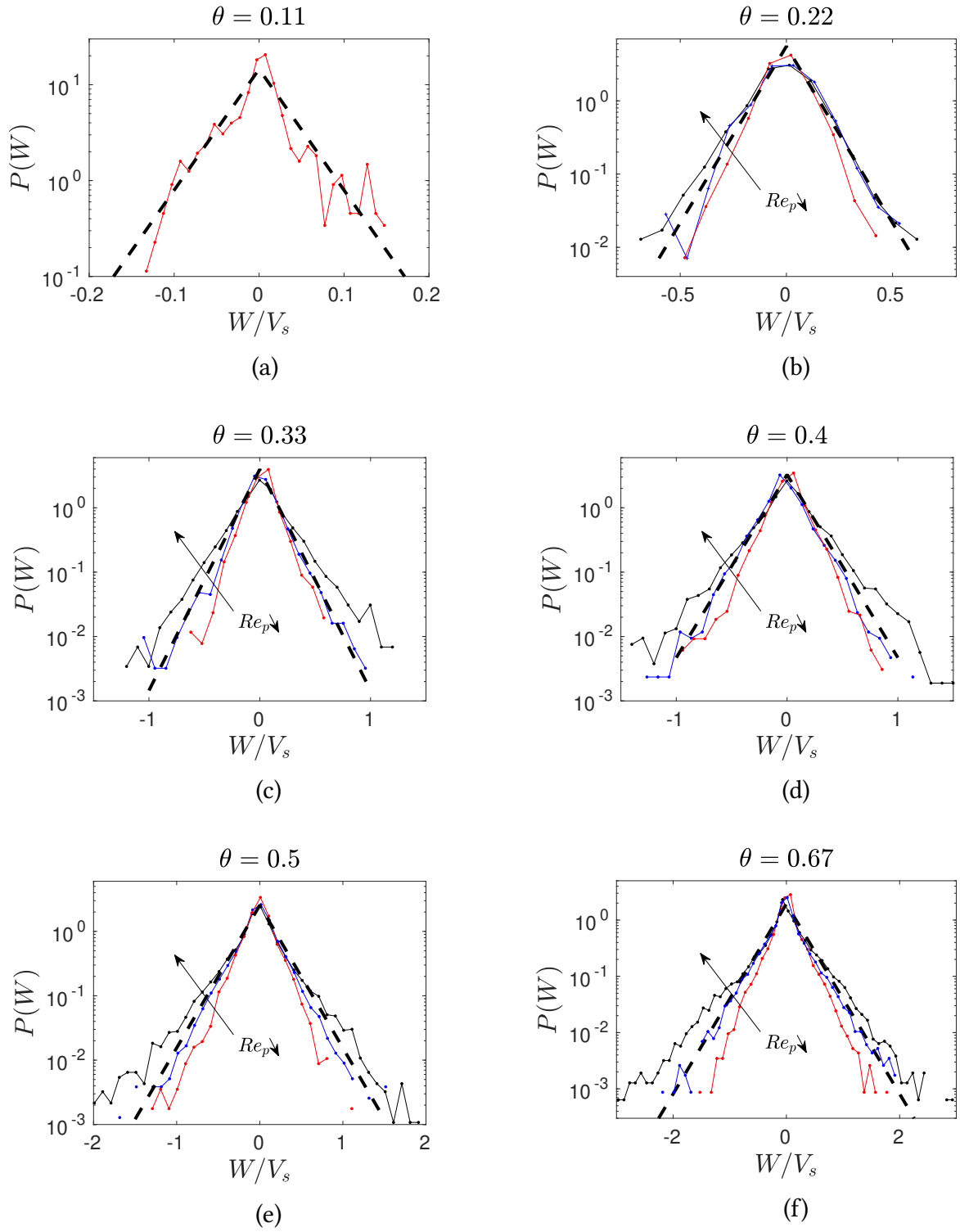
On considère la distribution des vitesses verticales des grains  $V_p$ , représentée sur la figure 4.20(b). On constate que la même distribution convient aussi ici, en première approximation :

$$P(V) = \frac{1}{2\delta_V} \exp\left(-\frac{|V|}{\delta_V}\right), \quad (4.33)$$

où  $P(V)$  est la probabilité qu'une particule prise au hasard parmi les particules mobiles ait la vitesse verticale  $V$  et  $\delta_V$  est la largeur caractéristique de cette distribution de vitesses. On obtient alors un plutôt bon accord pour  $\delta_V = 0.33V_s = 0.028\dot{\gamma}$  (tracé en trait plein sur la figure 4.20(b)). Ici aussi l'écart-type de cette loi de probabilité est plus élevé que nos attentes mais ce n'est pas très surprenant comme on obtient déjà des vitesses de particules plus élevées que lors des expériences précédentes. Cette distribution est plus bruitée que pour les vitesses transversales. Pour  $W$ , les causes de la dispersion des vitesses sont les mêmes pour  $W \geq 0$  et  $W \leq 0$ . Ici, pour la vitesse verticale des particules  $V$ , c'est la gravité qui est responsable des vitesses négatives en faisant sédimenter les grains et c'est l'action du fluide qui entraîne les particules qui est donc responsable des vitesses positives. À cela s'ajoutent aussi les fluctuations "naturelles" de la vitesse à cause des interactions entre particules (qui est la seule cause des fluctuations de la vitesse transversale  $W$ ). On ne s'attend donc pas *a priori*

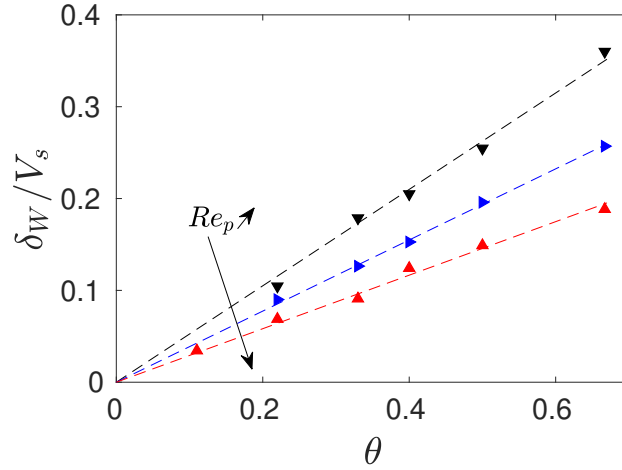
à ce que les distributions de vitesses verticales soient symétriques. La seule contrainte est que la vitesse moyenne de cette distribution doit être nulle (dans le régime stationnaire).

On s'intéresse maintenant à la dépendance vis-à-vis du nombre de Shields  $\theta$  et du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  des PDF des vitesses transversale  $W$  et verticale  $V$ , respectivement représentées sur les figures 4.21 et 4.24. Pour le plus faible nombre de Shields,  $\theta = 0.11$ , il a fallu diminuer le seuil de vitesse d'un facteur 10 afin de ne pas avoir un trou au milieu de la distribution et le signal est tout de même très bruité. Peu de particules sont en mouvement et la durée de la simulation n'a pas permis d'accumuler suffisamment de données pour obtenir des distributions lisses. Pour  $\theta = 0.22$ , le seuil de vitesse choisi écrête légèrement le pic central de la distribution et on pourrait alors ajuster les PDF obtenues par des gaussiennes. C'est justement à ce nombre de Shields que CHARRU *et al.* (2004) ont décrit leurs observations par cette distribution. Pour les nombres de Shields plus grands, les PDF ont le même comportement que pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . On a alors ajusté le paramètre  $\delta_W$  (équation (4.32)) pour chacun des couples  $(Re_p, \theta)$  et on les a tracés sur la figure 4.22.



**FIGURE 4.21** – Distribution des vitesses transversales des grains avec les mêmes notations que pour la figure 4.17. Les ajustements représentés (en pointillés noirs) ne prennent en compte que le nombre de Reynolds de  $Re_p = 1$  afin de ne pas surcharger les graphes et sont effectués à l’aide de la loi de probabilité (4.32).





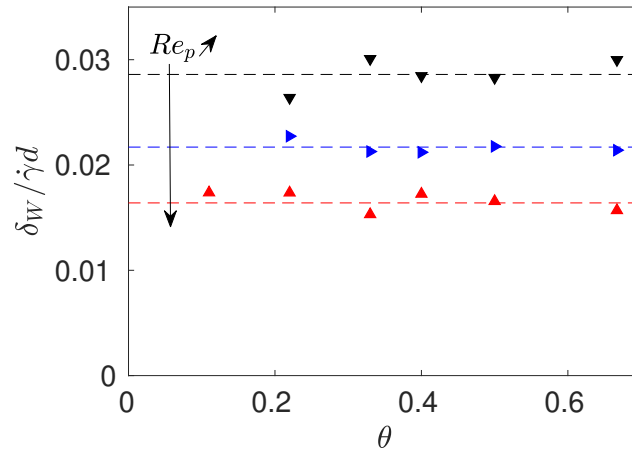
**FIGURE 4.22** – Dépendance de la largeur caractéristique  $\delta_W$  des distributions de la figure 4.21, adimensionnée par la vitesse de Stokes  $V_s$ , en fonction du nombre de Shields  $\theta$ .

( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ .

Des ajustements linéaires sont également représentés et montrent la tendance.

On observe une variation linéaire de la largeur caractéristique  $\delta_W$ , adimensionnée par la vitesse de Stokes, de la distribution des vitesses transverses  $W$  des grains avec le nombre de Shields. De plus, la largeur de ces distributions est une fonction décroissante du nombre de Reynolds. Cette variation est plutôt bien approximée par une loi de puissance du nombre de Reynolds particulière  $\delta_W/V_s \sim Re^{-0.07}$ . Pour un nombre de Reynolds particulière  $Re_p = 0.1$  et un nombre de Shields  $\theta = 0.22$ , on obtient l'écart-type  $\sigma_W(Re_p = 0.1) = \sqrt{2} \delta_W = \sqrt{2} \times 0.105 V_s = 0.149 V_s = 0.0375 \dot{\gamma} d$ . Cette valeur peut être comparée à celle de l'écart-type  $\sigma_W = 0.02 \dot{\gamma} d$  obtenu par CHARRU *et al.* (2004) lors d'expériences à  $Re_p \leq 0.3$  et  $\theta = 0.24$ . On obtient donc un écart-type presque deux fois plus grand avec la présente méthode. Cet écart est en partie imputable à l'absence de prise en compte des effets de lubrification par notre méthode (voir section 4.4).

On rappelle qu'une dépendance linéaire avec  $\theta$  d'une vitesse adimensionnée par la vitesse de Stokes est équivalent à une vitesse adimensionnée par  $\dot{\gamma} d$  qui est indépendante de  $\theta$ . On trace donc  $\delta_W/\dot{\gamma} d$  en fonction de  $\theta$  sur la figure 4.23.

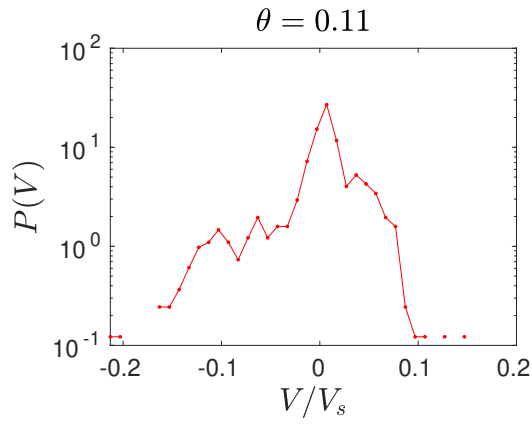


**FIGURE 4.23** – Dépendance de la largeur caractéristique  $\delta_W$  des distributions de la figure 4.21, adimensionnée par  $\dot{\gamma} d$ , en fonction du nombre de Shields  $\theta$ .

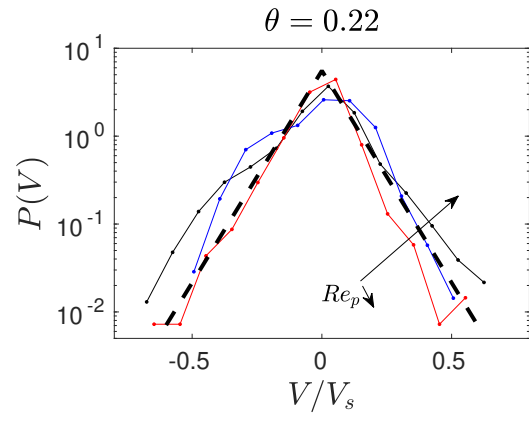
( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ ,  $\delta_W/\dot{\gamma} d \simeq 0.029$ ; ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$ ,  $\delta_W/\dot{\gamma} d \simeq 0.022$ ; ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ ,  $\delta_W/\dot{\gamma} d \simeq 0.016$ .

La figure 4.23 montre que la largeur caractéristique de la distribution des vitesses transversales  $W$  adimensionnée par  $\dot{\gamma}d$  est indépendante du nombre de Shields  $\theta$ . L'erreur maximale commise ici est d'environ 7.5% et est atteinte pour  $Re_p = 0.1$  et  $\theta = 0.22$ ; l'erreur quadratique moyenne sur l'ensemble des données présentées est de 4.2%.

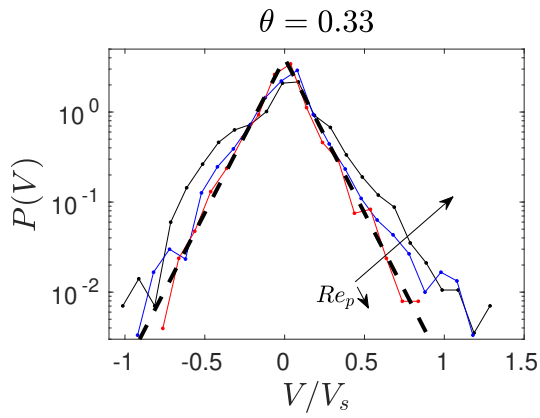
On considère désormais les distributions des vitesses verticales sur la figure 4.24. Comme expliqué précédemment, pour les vitesses verticales  $V$ , les distributions obtenues sont moins symétriques par rapport 0 que pour les vitesses transversales  $W$ . On peut alors effectuer des ajustements avec des largeurs caractéristiques différentes à droite et à gauche. Ici, on choisit de n'utiliser qu'un seul paramètre d'ajustement pour les vitesses positives et négatives. On constate alors que les écarts à la distribution de probabilité (4.33) sont plus prononcés pour les faibles nombres de Reynolds particuliers.



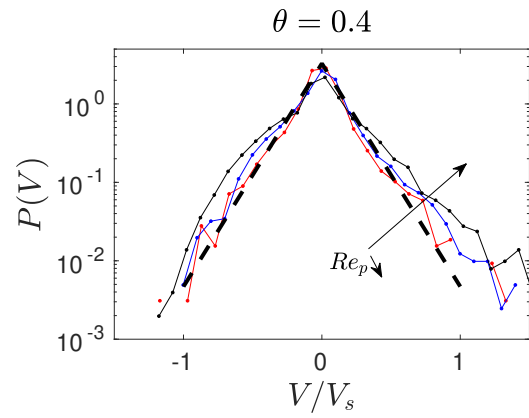
(a)



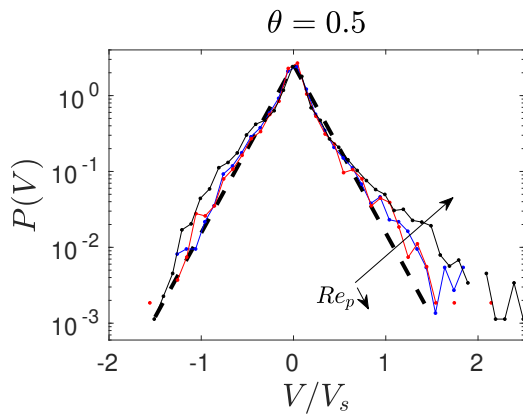
(b)



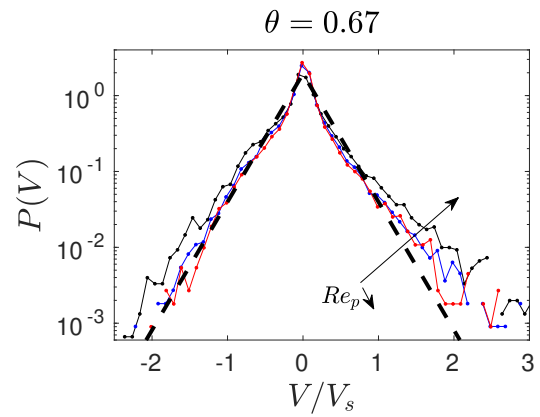
(c)



(d)

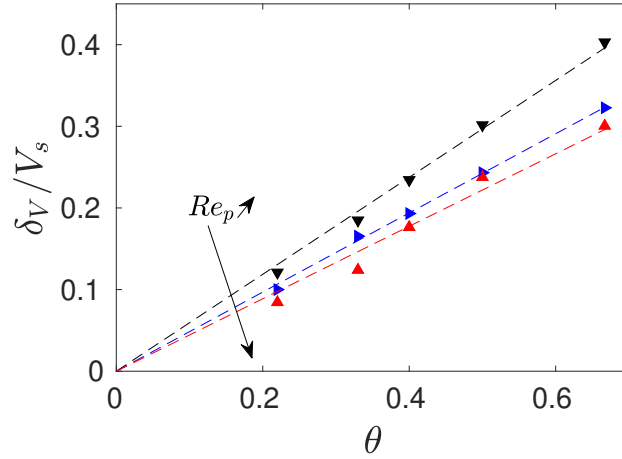


(e)



(f)

**FIGURE 4.24** – Distribution des vitesses verticales des grains avec les mêmes notations que pour la figure 4.17. Les ajustements représentés (en pointillés noirs) ne prennent en compte que le nombre de Reynolds de  $Re_p = 1$  afin de ne pas surcharger les graphes et sont effectués à l'aide de la loi de probabilité (4.33).

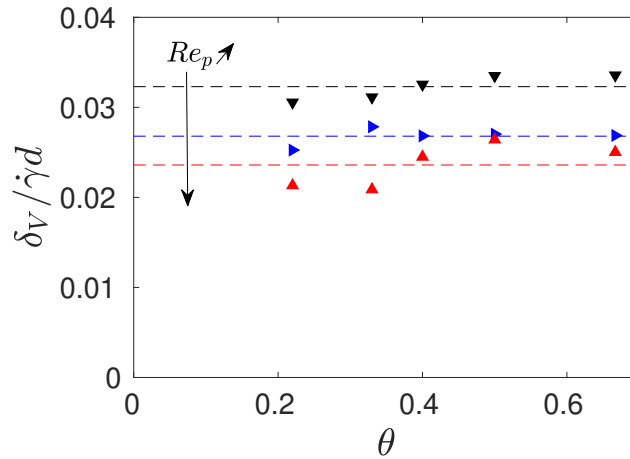


**FIGURE 4.25** – Dépendance de la largeur caractéristique  $\delta_V$  des distributions de la figure 4.24, adimensionnée par la vitesse de Stokes  $V_s$ , en fonction du nombre de Shields  $\theta$ .

( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ .

Des ajustements linéaires sont également représentés et montrent la tendance.

Comme pour les vitesses transversales  $W$  mais avec une plus grande dispersion des données (au moins en partie due à l'asymétrie des distributions), on observe une variation linéaire de  $\delta_V/V_s$  avec le nombre de Shields  $\theta$  sur la figure 4.25. On peut aussi noter que  $\delta_V$  et  $\delta_W$  sont du même ordre de grandeur. La variation de  $\delta_V$  avec le nombre de Reynolds peut aussi être approximée par une loi de puissance, l'exposant étant sensiblement proche que celui pour  $\delta_W$ , on trouve  $\delta_V/V_s \sim Re^{-0.06}$ . Comme pour les vitesses transversale, on observe une variation linéaire de  $\delta_V/V_s$  avec  $\theta$ , ce qui correspond à  $\delta_V/\dot{\gamma}d$  indépendant de  $\theta$ . On trace alors  $\delta_V/\dot{\gamma}d$  en fonction de  $\theta$  sur la figure 4.26.



**FIGURE 4.26** – Dépendance de la largeur caractéristique  $\delta_V$  des distributions de la figure 4.24, adimensionnée par  $\dot{\gamma}d$ , en fonction du nombre de Shields  $\theta$ .

( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ ,  $\delta_V/\dot{\gamma}d \simeq 0.032$ ; ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$ ,  $\delta_V/\dot{\gamma}d \simeq 0.027$ ; ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ ,  $\delta_V/\dot{\gamma}d \simeq 0.024$ .

La figure 4.26 montre que la largeur caractéristique de la distribution des vitesses verticales  $V$  adimensionnée par  $\dot{\gamma}d$  est quasi indépendante du nombre de Shields  $\theta$ . L'erreur maximale commise ici est d'environ 11.9% et est atteinte pour  $Re_p = 10$  et  $\theta = 0.33$  (si on ne prend en compte que les cas  $Re_p \leq 1$ , alors l'erreur maximale est inférieure à 6%); l'erreur quadratique moyenne sur l'ensemble des données présentées est de 6.0%.

Pour conclure, on observe des distributions exponentielles (équation (4.31)) pour la vitesse des grains dans le sens de l'écoulement. Comme observé dans la section 4.3.3, l'échelle caractéristique de cette vitesse est  $\theta^2 V_s = \theta \dot{\gamma} d$ . On obtient l'expression de la vitesse moyenne des particules :

$$\overline{U}_p^{PDF} = C \theta^2 V_s = C \theta \dot{\gamma} d, \quad (4.34)$$

avec  $C = 8.0$ . Cette vitesse moyenne est presque indépendante du nombre de Reynolds particulaire. Pour les distributions de probabilité des vitesses perpendiculaires à l'écoulement, on observe également des distributions exponentielles (équations (4.32) et (4.33)). La dispersion de ces vitesses autour de leur moyenne (nulle ici) possède  $\theta V_s = \dot{\gamma} d$  comme échelle caractéristique, et non  $\theta^2 V_s = \theta \dot{\gamma} d$  comme pour la vitesse dans le sens de l'écoulement. Ces dispersions décroissent lorsque le nombre de Reynolds particulaire augmente.

### 4.3.5 Densités surfaciques de grains mobiles et vitesses moyennes

Si on se réfère au modèle de MOUILLERON *et al.* (2009), il y a une grandeur caractéristique de l'écoulement de grains que nous n'avons pas encore abordée : la densité surfacique de particules mobiles  $n_s$ . Il s'agit du nombre de grains en mouvement par unité de surface (horizontale). Dans l'équation (4.17), seuls les grandeurs  $V_p$  et  $q$  sont calculables sans ambiguïté. En particulier, le calcul de la vitesse moyenne peut être réalisé de différentes manières. Nous en décrivons quelques unes ici afin de montrer son impact sur le calcul de la densité surfacique de grains  $n_s$ .

Pour le moment, nous avons défini la vitesse moyenne de la couche mobile à l'aide d'une vitesse seuil pour dissocier les particules statiques des particules en mouvement (ce seuil a été placé arbitrairement à 2% de la vitesse de Stokes). Pour éviter toute confusion, on la notera ici  $\overline{U}_p^{seuil}$ , et on notera  $n_s^{seuil}$  la densité surfacique associée.

On a également défini la vitesse moyenne des particules à partir des distributions de probabilité de la vitesse  $U_p$  dans le sens de l'écoulement (pour  $U_p \geq V_s$ , voir les figures 4.17 et 4.18). On note cette vitesse moyenne  $\overline{U}_p^{PDF}$  et on notera  $n_s^{PDF}$  la densité surfacique de particules mobiles qui y est associé au travers de la relation (4.17).

DURÁN *et al.* (2014) proposent une autre façon de calculer une vitesse moyenne sans recourir à une vitesse seuil en la définissant de la façon suivante :

$$\overline{U}_p^{(1)} = \frac{\sum_p U_p^2}{\sum_p U_p}. \quad (4.35)$$

Cela revient à pondérer les vitesses des particules lors du calcul de la moyenne, le coefficient de pondération étant la vitesse  $U_p$  elle-même. En effet, la moyenne pondérée avec les coefficients de pondération  $a_p$  s'écrit  $\sum_p (a_p U_p) / \sum_p a_p$ . Cette approche n'est pas intuitive, elle donne plus de poids aux particules rapides mais elle a l'avantage de ne pas tenir compte des particules ayant une vitesse nulle. Ainsi, cette moyenne ne dépend pas de la profondeur du lit considéré et ce, sans utiliser de seuil de vitesse.

En fait, en se basant sur cette idée, il est possible de définir une infinité de vitesses moyennes, notées  $\overline{U}_p^{(\xi)}$ , définies par :

$$\overline{U}_p^{(\xi)} = \frac{\sum_p U_p^{\xi+1}}{\sum_p U_p^{\xi}}, \quad (4.36)$$

pour tout  $\xi > 0$ . Il faut alors faire attention à n'avoir que des vitesses de grains positives. Or lors d'un rebond, ou en redescendant dans un "trou" formé par d'autres grains, une particule peut transitoirement avoir une vitesse négative. La définition peut être adaptée en séparant le signe de la vitesse d'une part et le calcul de la fonction puissance d'autre part. Cela revient à choisir les coefficients de

pondération comme étant  $a_p = |U_p|^\xi$  et non pas  $a_p = U_p^\xi$ . On peut d'ailleurs remarquer que pour la vitesse moyenne  $\bar{U}_p^{(1)}$  (équation (4.35)) définie par DURÁN *et al.* (2014), si une particule a une vitesse négative, cela fait augmenter la somme au numérateur et fait diminuer celle du dénominateur. Ces deux effets font augmenter la valeur moyenne de la vitesse obtenue alors qu'elle devrait diminuer. Le traitement de séparation du signe et du calcul de la puissance dans l'opérande doit donc être fait systématiquement. On obtient alors une vitesse moyenne des grains mobiles définie par la relation :

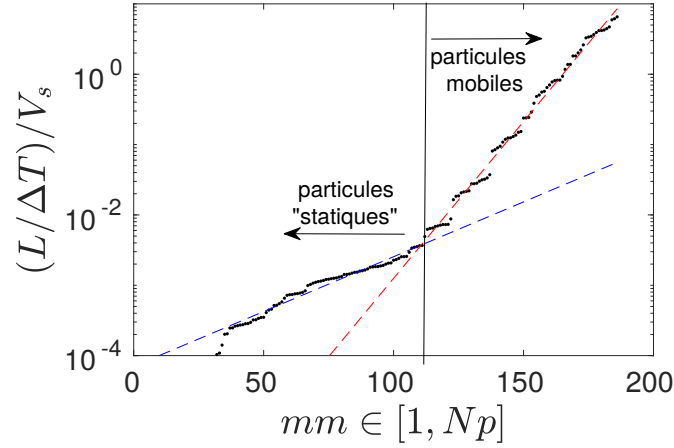
$$\bar{U}_p^{(\xi)} = \frac{\sum_p U_p |U_p|^\xi}{\sum_p |U_p|^\xi} = \frac{\sum_p \text{sign}(U_p) |U_p|^{\xi+1}}{\sum_p |U_p|^\xi}, \quad (4.37)$$

pour tout  $\xi > 0$ , où  $\text{sign}(U_p) = U_p/|U_p| = \pm 1$  est la fonction signe ( $U_p = 0$  ne pose pas de problème car on multiplie le  $\text{sign}(U_p)$  par  $|U_p|^{\xi+1}$  dans l'expression de  $\bar{U}_p^{(\xi)}$ , on choisit  $\text{sign}(0) = 1$  par exemple). On a vu que  $\bar{U}_p^{(1)}$  donnait plus de poids aux particules rapides qu'aux lentes. Cette affirmation est vraie pour toutes valeurs de  $\xi$  et plus  $\xi$  est grand, plus c'est le cas. On n'ira donc pas explorer les valeurs de  $\xi$  supérieures à 1. Par contre, pour les valeurs de  $\xi$  inférieures à 1, la pondération s'aplatie d'autant plus que  $\xi$  est petit et elle tend toujours vers 0 lorsque  $U_p$  tend vers 0. À la limite pour  $\xi$  tendant vers 0, on pondère toutes les vitesses par  $|U_p|^0 = 1$ . En posant  $0^0 = 0$  (ce qui n'est pas le prolongement habituel), on retombe alors sur la limite de la moyenne avec un seuil pour la valeur du seuil tendant vers 0.

Finalement, bien que la moyenne  $\bar{U}_p^{(\xi)}$  permette de s'affranchir du choix d'une vitesse seuil, il faut tout de même choisir une valeur pour l'exposant  $\xi$  ce qui met les deux définitions  $\bar{U}_p^{(\xi)}$  et  $\bar{U}_p^{\text{seuil}}$  sur le même plan vis-à-vis de leur objectivité.

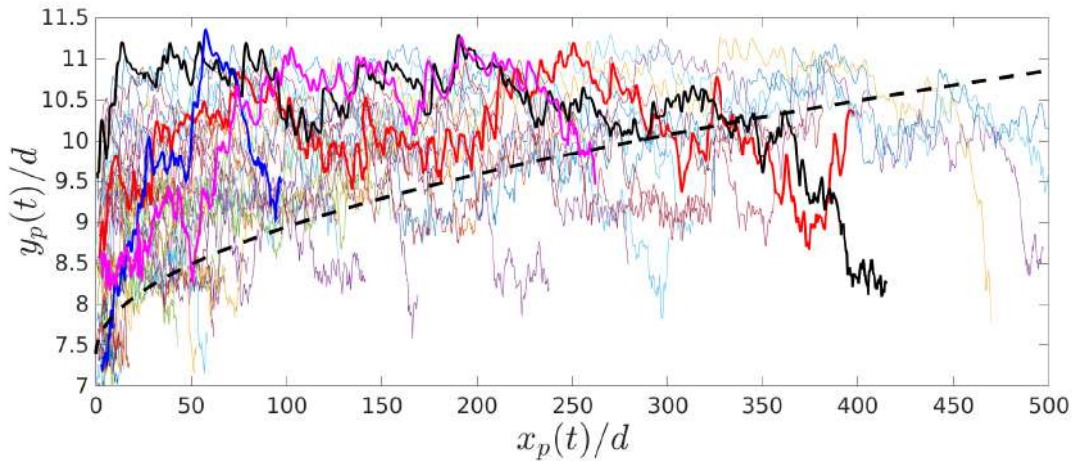
On peut aussi définir une vitesse moyenne à partir d'une densité surfacique en inversant la relation (4.17). Dans cette optique, on trace la distance parcourue dans le sens de l'écoulement par chacune des particules au cours de la simulation, divisée par la durée de la prise de moyenne (uniquement pendant le régime stationnaire); cela correspond donc à la vitesse moyenne longitudinale de chaque grain.

Ce traitement est fait dans le but de distinguer deux classes de particules : les mobiles et celles qui sont considérées comme statiques. Pour  $Re_p = 1$  et  $\theta = 0.67$ , on trace sur la figure 4.27 cette vitesse moyenne, adimensionnée par la vitesse de Stokes. La majorité des particules possède une vitesse moyenne très faible. Ce sont les grains qui forment la base du lit granulaire. On observe une courbe formée de deux portions de droite et on peut considérer que la séparation entre les particules statiques et mobiles correspond à la brisure de pente (en échelle logarithmique). Ici, l'intersection entre les deux portions de droite (placées à l'aide d'ajustements linéaires) correspond à la particule "numéro 110.6". On considère alors qu'on a 111 particules statiques et  $75 (= Np - 111)$  particules mobiles. En divisant cette valeur par la surface du lit de grains, on obtient alors une densité surfacique de grains mobiles de façon objective. On notera cette densité surfacique de particules mobiles  $n_s^{\text{dist}}$  et  $\bar{U}_p^{\text{dist}}$  la vitesse moyenne associée. Ici, on a  $n_s^{\text{dist}} d^2 = 4.69$ , on peut alors en déduire la vitesse moyenne associée  $\bar{U}_p^{\text{dist}} = 1.08 V_s$  à l'aide de l'équation (4.17) (voir la figure 4.29).



**FIGURE 4.27** – Vitesse moyenne de chaque particule adimensionnée par la vitesse de Stokes et triée par vitesses croissantes.  $mm$  correspond à la numérotation des  $N_p = 186$  particules.  $L$  est la distance parcourue dans le sens de l'écoulement par chaque particule pendant la durée  $\Delta T$  correspondant à la durée du régime stationnaire simulé. Les droites rouge et bleue correspondent respectivement à des ajustements pour les particules mobiles et statiques. Elles se coupent entre  $mm = 110$  et  $111$ .

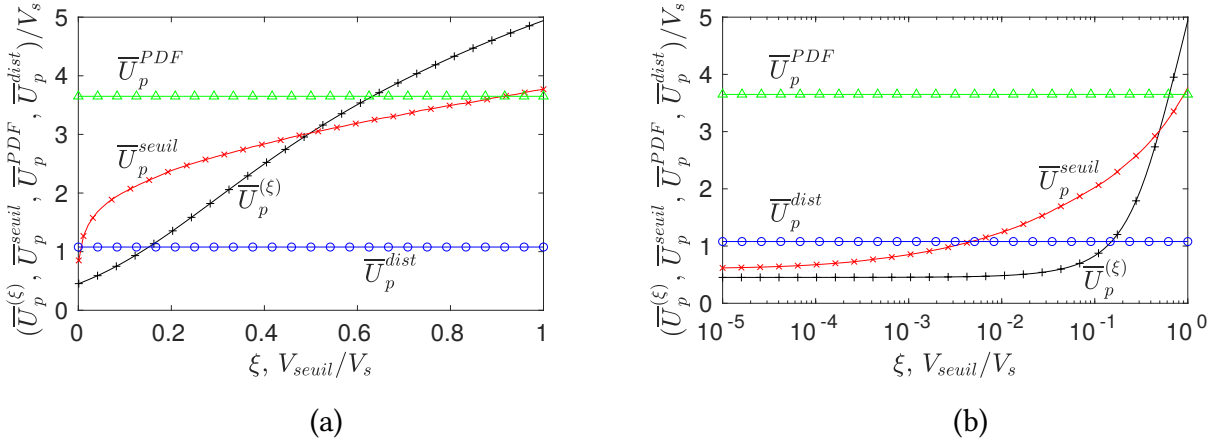
Le principal avantage de cette définition de la densité surfacique est d'être objective mais l'inconvénient est qu'on intègre le mouvement des particules avant d'en déduire la densité surfacique. On a alors seulement  $N_p$  points pour tracer la courbe représentée sur la figure 4.27. Une autre source d'incertitude de cette approche vient du fait qu'on a intégré les trajectoires des grains sur le temps de la simulation avant de séparer les particules en deux classes; or un grain peut se trouver dans la couche statique puis en sortir pour aller dans la couche mobile pendant un temps et puis retourner dans la zone statique du lit de grains par exemple. Ainsi, la courbe de la figure 4.27 peut devenir "bruitée" dans la zone de transition entre les deux classes de particules. La figure 4.28 trace les trajectoires des particules pour cette simulation. Certaines trajectoires ont été tracées en gras afin de mettre en évidence le mélange entre les différentes couches du lit de grains lors de son écoulement.



**FIGURE 4.28** – Trajectoires  $(x_p(t), y_p(t))$  pour l'ensemble des particules. Certaines trajectoires sont en gras afin de mettre en évidence le mélange entre les différentes altitudes du lit de grains. La courbe en pointillés correspond au profil de vitesse parabolique (équation (4.12)) multiplié par la durée de la simulation.

Finalement, on dispose de plusieurs définitions pour la vitesse moyenne des grains mobiles ( $\overline{U}_p^{seuil}$ ,  $\overline{U}_p^{(\xi)}$ ,  $\overline{U}_p^{PDF}$  et  $\overline{U}_p^{dist}$ ) et plusieurs densités surfaciques de grains mobiles associées à ces vitesses

moyennes. Sur la figure 4.29, on trace les vitesses moyennes obtenues pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ , en fonction de l'exposant  $\xi$  ou en fonction du seuil de vitesse choisi pour distinguer les particules mobiles de celles au repos. On trace également les différentes valeurs possibles de densité surfacique de grains mobiles qui y sont associées sur la figure 4.30.



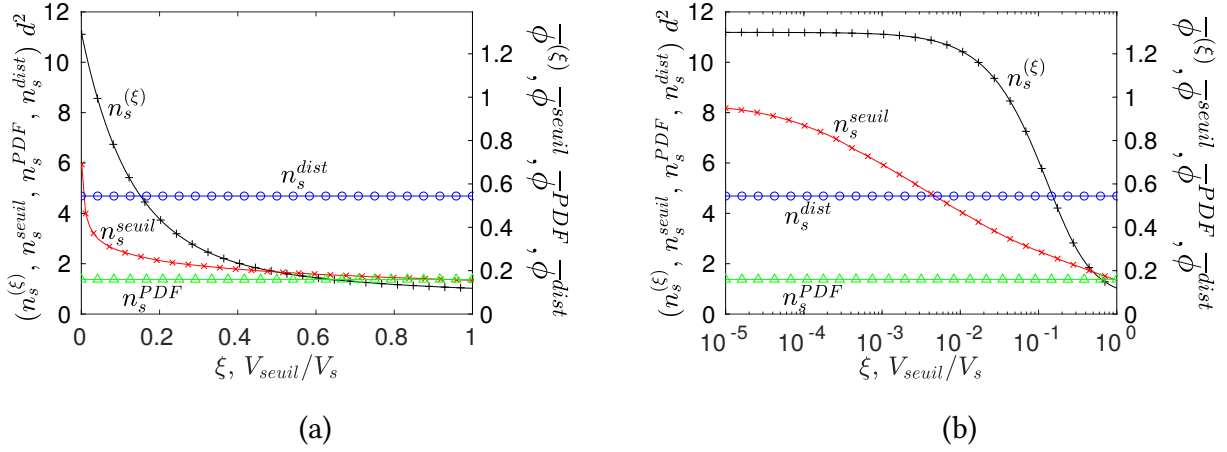
**FIGURE 4.29** – Valeurs de la vitesse moyenne de la couche de grains mobiles (adimensionnée par la vitesse de Stokes) pour les différentes définitions ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ ).  
 (+) :  $\bar{U}_p^{(\xi)}$  en fonction de  $\xi$ ; ( $\times$ ) :  $\bar{U}_p^{seuil}$  en fonction de  $V_{seuil}/V_s$ ; ( $\triangle$ ) :  $\bar{U}_p^{PDF}$ ; ( $\circ$ ) :  $\bar{U}_p^{dist}$ .  
 (a) : échelle linéaire; (b) : échelle semi-logarithmique.

Une dernière grandeur caractérisant la couche de grains mobiles est la compacité moyenne  $\bar{\phi}$ . On a  $q_{sat} = V_p n_s \bar{U}_p$  (équation (4.17)) d'une part mais, en supposant que  $\phi$  est constant sur toute l'épaisseur de la couche de grains mobiles ( $\phi = \bar{\phi}$ ), on a aussi  $q_{sat} = \bar{\phi} \Delta H \bar{U}_p$  (équation (4.16)). On définit alors la fraction volumique solide moyenne de la couche de grains mobiles par :

$$\bar{\phi} = \frac{n_s V_p}{\Delta H}, \quad (4.38)$$

où  $\Delta H$  correspond à l'épaisseur de la couche mobile (équation (4.25)) et  $V_p$  au volume des grains. On a choisi de ne pas définir de compacité moyenne de la couche mobile à partir de  $\delta h$  (équation (4.26)) mais c'est également envisageable. On a alors une relation de proportionnalité entre  $\bar{\phi}$  et  $n_s$ . On a tracé la compacité moyenne de la couche mobile sur la figure 4.30 (axes de droite).





**FIGURE 4.30** – Valeurs de la densité surfacique de grains mobiles (axe de gauche) (adimensionnée par  $1/d^2$ ) et de la fraction solide moyenne de la couche mobile (axe de droite) pour les différentes définitions ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ ). (+) :  $n_s^{(\xi)}$  et  $\bar{\phi}^{(\xi)}$  en fonction de  $\xi$ ; (×) :  $n_s^{seuil}$  et  $\bar{\phi}^{seuil}$  en fonction de  $V_{seuil}/V_s$ ; (△) :  $n_s^{PDF}$  et  $\bar{\phi}^{PDF}$ ; (○) :  $n_s^{dist}$  et  $\bar{\phi}^{dist}$ .  
(a) : échelle linéaire et (b) : échelle semi-logarithmique. Ici, on a  $\bar{\phi} = n_s V_p / \Delta H$ .

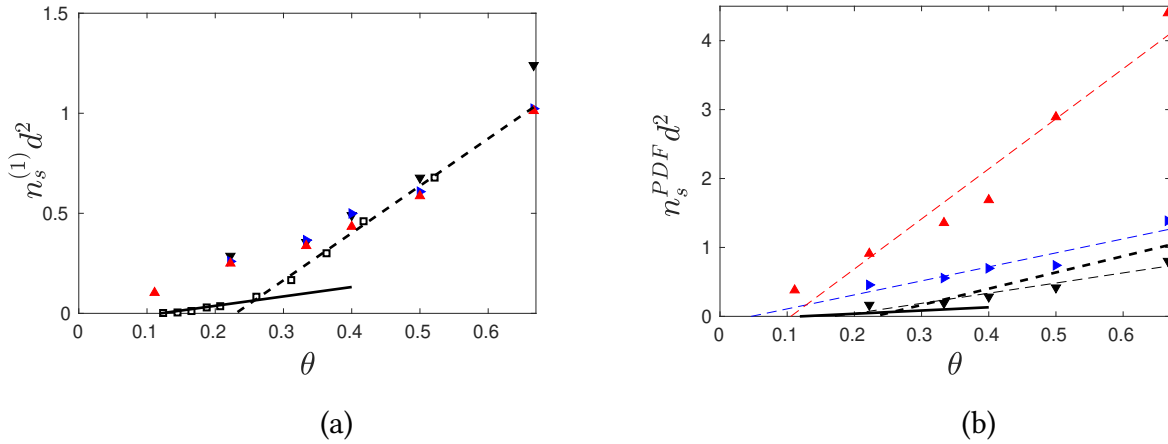
On peut voir sur la figure 4.29 que les valeurs de  $\bar{U}_p^{(\xi)}$  et  $\bar{U}_p^{seuil}$  dépendent beaucoup des valeurs de  $\xi$  et de la vitesse seuil respectivement. En particulier,  $\bar{U}_p^{seuil}$  varie rapidement lorsque la valeur du seuil devient faible, or ce sont justement ces valeurs de seuil que l'on souhaite utiliser. Cette définition de la vitesse moyenne des grains mobiles n'est donc *a priori* pas la plus adaptée à mettre en œuvre. On peut également voir sur la figure 4.29 (b) qu'on a effectivement  $\lim_{\xi \rightarrow 0} (\bar{U}_p^{(\xi)}) = \lim_{V_{seuil}/V_s \rightarrow 0} (\bar{U}_p^{seuil})$  bien que la convergence soit lente.

Sur la figure 4.30, on voit que  $n_s$  aussi dépend fortement du choix de la valeur de l'exposant  $\xi$  ou de la valeur du seuil de vitesse (et qu'il en est de même pour  $\bar{\phi}$ ). Au point que pour  $\xi \leq 0.1$ , on atteint (puis dépasse si on diminue encore la valeur de  $\xi$ ) la valeur  $\bar{\phi}^{(\xi)} \geq 0.6$  qui est la valeur maximale atteignable dans un lit de grains (aléatoire). On peut même dépasser 1 pour  $\xi \leq 4 \times 10^{-2}$ , ce qui n'as plus aucun sens physique.

On a donné quatre définitions différentes des densités surfaciques de grains mobiles, dont deux dépendant de paramètres ( $n_s^{seuil}$  et  $n_s^{(\xi)}$ ) ainsi que les vitesses moyennes des particules en mouvement et les fractions volumiques moyennes des particules mobiles associées. De ces différentes définitions, aucune ne permet de calculer une vitesse moyenne (et donc une densité surfacique) objective et robuste (au sens où la valeur varie peu en fonction du critère utilisé). On s'intéresse maintenant à leur dépendance aux paramètres sans dimension  $Re_p$  et  $\theta$ . BOUTELOUP (2017) et DURÁN *et al.* (2014) ont utilisé la densité surfacique  $n_s^{(\xi)}$  pour  $\xi = 1$ , on se limitera donc à cette valeur de l'exposant  $\xi$  afin de pouvoir comparer nos résultats aux leurs. On ne tracera que les résultats de BOUTELOUP (2017) pour des raisons de lisibilité des graphes, DURÁN *et al.* (2014) obtenant sensiblement les mêmes valeurs. La densité surfacique de particules mobiles  $n_s^{(1)}$  est présentée sur la figure 4.31(a).

Elle ne semble pas dépendre du nombre de Reynolds particulaire. Si on compare nos résultats à ceux de BOUTELOUP (2017), nous obtenons des densités surfaciques plus élevées avec la présente méthode pour les nombres de Shields  $\theta < 0.33$ . Pour les valeurs plus élevées de ce paramètre adimensionné, on retombe sur les mêmes valeurs que BOUTELOUP (2017) et DURÁN *et al.* (2014), avec la même dépendance linéaire au nombre de Shields  $\theta$ . On peut noter que BOUTELOUP (2017) obtient un bon accord avec les résultats de CHARRU *et al.* (2004) (s'appuyant pourtant sur une définition différente de  $n_s$ ).

On utilisera ce couple de droite comme référence pour comparer les densités surfaciques par la suite.



**FIGURE 4.31** – (a) : Densité surfacique de grains mobiles  $n_s^{(1)}$  définie par l'équation (4.17) avec la vitesse moyenne donnée par la relation (4.37). (b) : Densité surfacique de grains mobiles  $n_s^{PDF}$  définie par l'équation (4.17) avec la vitesse moyenne obtenue à l'aide des distributions de probabilité des vitesses (figure 4.17). (▼) :  $Re_p = 0.1$ ; (►) :  $Re_p = 1$ ; (▲) :  $Re_p = 10$ ; (□) : BOUTELOUP (2017); (---) : BOUTELOUP (2017); (—) : CHARRU et al. (2004) (équation (4.39)). On a aussi tracé les meilleurs ajustements linéaires pour  $n_s^{PDF}$  afin de montrer la tendance.

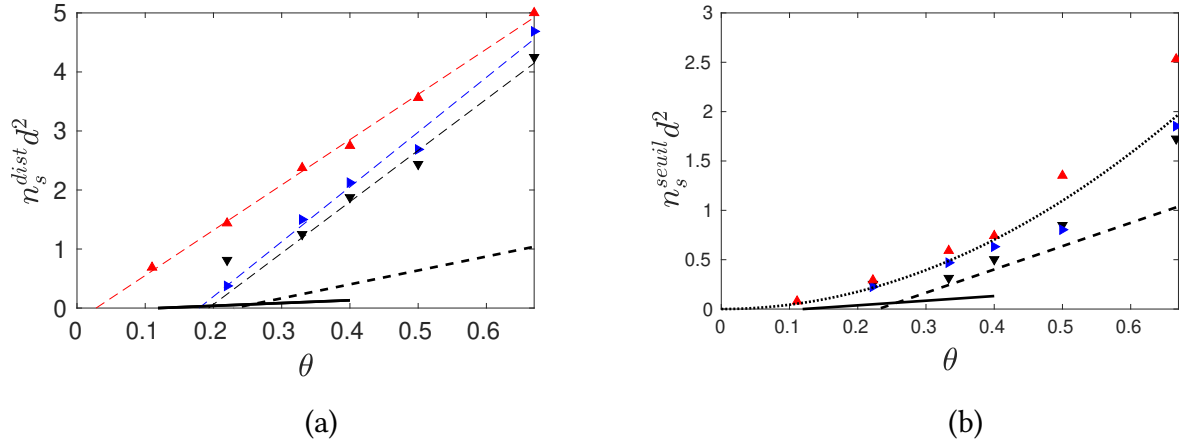
CHARRU et al. (2004) utilisent  $n_s^{PDF}$  en se basant sur la relation (4.17) et en prenant la vitesse moyenne  $\overline{U}_p^{PDF}$ . Ils obtiennent la corrélation suivante :

$$n_s^{PDF} d^2 = 0.47(\theta - 0.12), \quad (4.39)$$

pour des nombres de Shields  $\theta \leq 0.24$  et des nombres de Reynolds particuliers  $Re_p \leq 0.3$ . Cette relation correspond à la droite en trait plein sur les figures 4.31 et 4.32.

On trace alors les densités surfaciques obtenues via la même méthode sur la figure 4.31 (b) (notée avec l'exposant  $^{PDF}$ ). Avec cette définition, la densité surfacique de particules mobiles  $n_s^{PDF}$  augmente fortement avec le nombre de Reynolds particuliers. On obtient le même ordre de grandeur que les densités surfaciques obtenues par BOUTELOUP (2017) et DURÁN et al. (2014) pour les faibles nombres de Reynolds particuliers (ce qui correspond au nombre de Reynolds où ces résultats ont été obtenus,  $Re_p = 0.5$ ). La dépendance avec le nombre de Reynolds de  $n_s^{PDF}$  est bien décrite par une loi de puissance :  $n_s^{PDF} d^2 \sim Re_p^{0.4}$  et une dépendance linéaire avec le nombre Shields convient pour décrire les variations de la densité surfacique de particules mobiles avec ce paramètre sans dimension.

Si on regarde maintenant la densité surfacique  $n_s^{dist}$  (figure 4.32 (a)), définie à partir des vitesses moyennes de chaque grain (i.e.  $L_{simu}/T_{simu}$ , voir section 4.3.5), on observe encore une fois une variation linéaire de la densité surfacique de grains mobiles avec le nombre de Shields  $\theta$ .  $n_s^{dist}$  semble ne dépendre du nombre de Reynolds particuliers qu'au travers du seuil de mise en mouvement du lit de grains. Les valeurs de ces seuils obtenues à l'aide d'ajustements linéaires ne sont toutefois pas les mêmes que via les ajustements du débit granulaire ; pour  $Re_p = 10$ , le seuil  $\theta_c$  est plus faible ( $\theta_c \sim 0.05$  ici contre  $\sim 0.11$  en se basant sur la mesure du débit de grains) et pour  $Re_p = 0.1$  et 1, la valeur du seuil est plus élevée ( $\theta_c \sim 0.19$  ici, à comparer à un seuil situé entre 0.11 et 0.22 en se basant sur la mesure du débit de grains). Si on compare les valeurs de densité surfacique à celles obtenues précédemment, on constate qu'elles sont plus grandes d'un facteur 4 environ (sauf pour  $n_s^{PDF}(Re_p = 10)$  qui prend des valeurs particulièrement grandes).

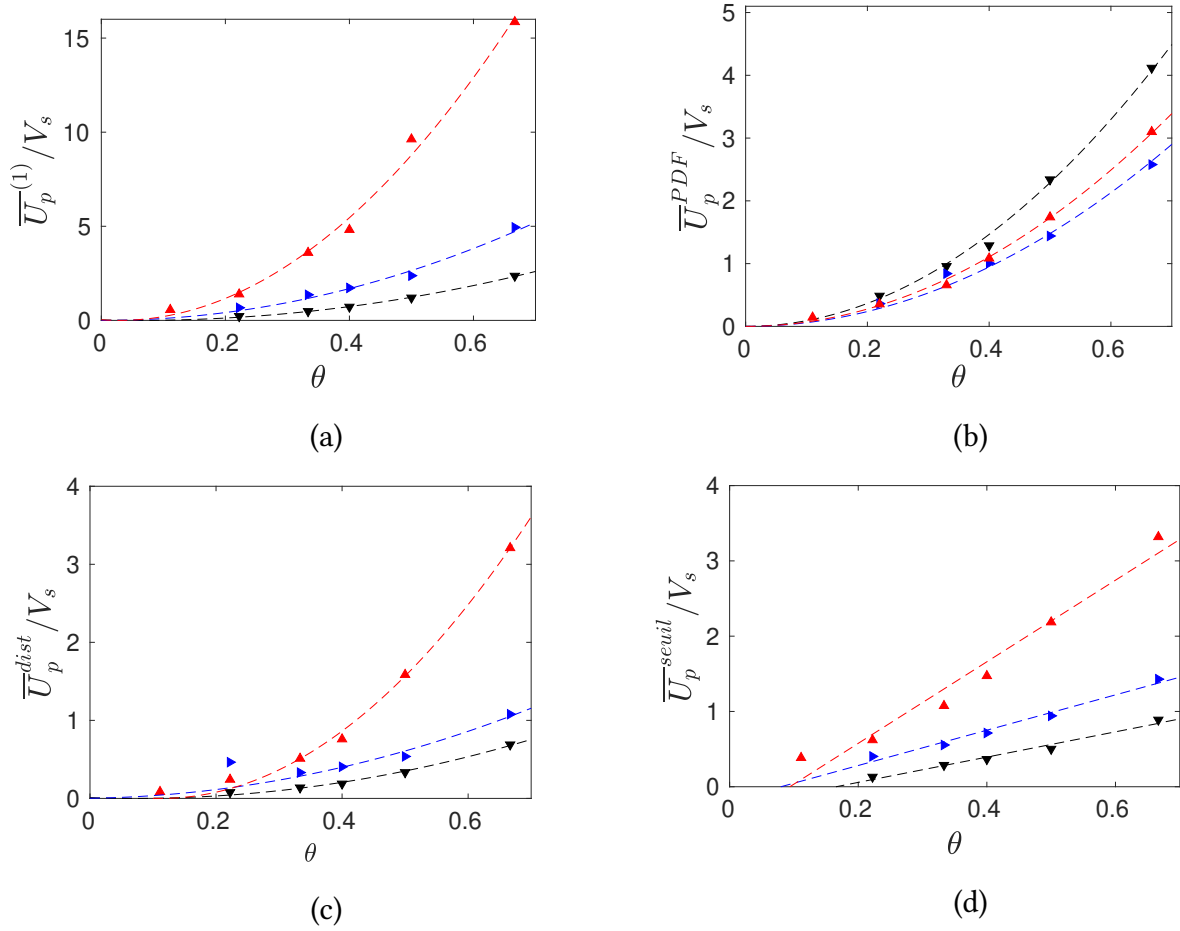


**FIGURE 4.32** – (a) : Densité surfacique de grains mobiles  $n_s^{dist}$ ; (b) : Densité surfacique de grains mobiles  $n_s^{seuil}$  définie par l'équation (4.17) en utilisant  $\bar{U}_p^{seuil}$ , la vitesse moyenne des particules ayant une vitesse supérieure à  $V_{seuil} = 0.02V_s$ . (▼) :  $Re_p = 0.1$ ; (►) :  $Re_p = 1$ ; (▲) :  $Re_p = 10$ ; (- -) : BOUTELOUP (2017); (-) : CHARRU et al. (2004) (équation (4.39)); (· · ·) : ajustement d'équation  $n_s^{seuil} d^2 = 4.4 \theta^2$ . On a aussi tracé les meilleurs ajustements linéaires pour  $n_s^{dist}$  pour montrer la tendance.

Considérons finalement la dernière définition de la densité surfacique de particules mobiles  $n_s^{seuil}$  (figure 4.32 (b)), le seuil de vitesse étant pris à 2% de la vitesse de Stokes afin de calculer la vitesse moyenne des grains mobiles et d'en déduire la densité surfacique de grains en mouvement à l'aide de la relation (4.17). Contrairement aux autres définitions, cette fois-ci la dépendance de la densité surfacique avec le nombre de Shields est quadratique et elle dépend relativement peu du nombre de Reynolds particulaire.

Après ce passage en revue des différentes définitions de la densité surfacique de grains mobiles, la première information qui en ressort est que ces définitions ne sont pas équivalentes. Certaines varient avec le nombre de Reynolds particulaire, d'autres non (en particulier  $n_s^{PDF}$  qui dépend fortement de  $Re_p$  et  $n_s^{(1)}$  qui n'en dépend pas). De plus, la plupart de ces définitions présentent une variation linéaire avec le nombre de Shields (parfois avec la présence d'un seuil) mais  $n_s^{seuil}$  varie comme  $\theta^2$ . On peut alors souligner l'importance de bien définir cette grandeur afin de pouvoir la comparer avec d'autres études.

On trace les différentes définitions de la vitesse moyenne en fonction du nombre de Shields sur la figure 4.33.



**FIGURE 4.33** – Vitesses moyennes, adimensionnée par la vitesse de Stokes  $V_s$ , en fonction du nombre de Shields; (a) : avec la définition (4.35), (b) : via les ajustements des PDF (voir figure 4.17) sans prise en compte du nombre de Reynolds, (c) : à partir de la relation (4.17) avec  $n_s$  définie comme sur la figure 4.27 et (d) : moyenne non pondérée de la vitesse des particules allant à plus de 2% de la vitesse de Stokes. ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ , ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 1$  et ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ . On a aussi tracé les meilleurs ajustements quadratiques (ou linéaires pour  $\bar{U}_p^{seuil}$ ) afin de montrer la tendance.

Pour chacune de ces définitions de la vitesse moyenne (sauf pour  $\bar{U}_p^{seuil}$ ), on obtient une dépendance quadratique avec le nombre de Shields  $\theta$  si on l'adimensionne avec la vitesse de Stokes  $V_s$ . Comme mentionné dans la section 4.3.4, cette dépendance quadratique est à mettre en relation avec la dépendance cubique du débit de grains et celle linéaire de la densité surfacique de particules mobiles; en effet,  $q_{sat} = \bar{U}_p^{seuil} n_s^{seuil} V_p$ , où  $V_p$  est le volume des grains. Pour la vitesse moyenne  $\bar{U}_p^{seuil}$ , qui varie linéairement avec  $\theta$ , c'est  $n_s^{seuil}$  qui varie de façon quadratique avec  $\theta$  et on obtient encore une dépendance cubique, vis-à-vis de  $\theta$ , du débit de grains adimensionné par  $V_s d$ . Comme pour la densité surfacique des particules mobiles, la vitesse moyenne des particules mobiles peut être définie de plusieurs façons et le comportement (variation avec  $Re_p$  et  $\theta$ ) ainsi que les valeurs que prend cette vitesse moyenne dépendent fortement du choix de la définition. Par exemple, pour  $\theta = 0.67$  et  $Re_p = 10$ ,  $\bar{U}_p^{(1)} \simeq 15V_s$  et  $\bar{U}_p^{seuil} \simeq 3V_s$ ; et puis  $\bar{U}_p^{PDF}$  dépend moins du nombre de Reynolds particulaire que les autres définitions. Il est donc primordial d'explicitier systématiquement la définition de la vitesse moyenne utilisée (de même pour la densité surfacique de grains mobiles).

## 4.4 Influence des effets de lubrification

Dans cette partie, on utilise un modèle de lubrification afin d'avoir une idée de l'influence de cet effet sur un écoulement granulaire. L'objectif n'est pas d'effectuer une étude détaillée des effets de lubrification mais d'en étudier qualitativement l'impact sur l'écoulement granulaire afin d'éclairer notre interprétation lorsque nous comparons nos résultats (sans prise en compte du phénomène de lubrification) à ceux des expériences ou des simulations utilisant un modèle de lubrification (comme par exemple DERKSEN (2011)).

Lorsqu'une particule s'apprête à entrer en contact avec une autre particule (ou un mur), un film de fluide se retrouve confiné entre les deux surfaces et doit être drainé avant de permettre le contact. L'écoulement d'un fluide visqueux dans cette fine couche est causé par une forte surpression dans l'interstice séparant les deux particules. Cette surpression entraîne une force répulsive sur les particules, notée  $F_{lub}$ . Un calcul rigoureux (de KIM et KARRILA (2013)) montre que le terme dominant à courte distance de cette interaction vaut :

$$F_{lub} = -\frac{3\pi\eta_f d^2 \dot{\delta}}{8\delta}, \quad (4.40)$$

où  $\delta$  est la distance séparant les deux particules et  $\dot{\delta}$  la dérivée temporelle de cette distance. Si on considère le contact entre les particules  $i$  et  $j$ , respectivement positionnées en  $\mathbf{r}_i$  et  $\mathbf{r}_j$  et de rayon  $R_i$  et  $R_j$  alors  $\delta = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j| - (R_i + R_j)$ . On remarque que l'expression de cette force diverge au moment du contact ( $\delta = 0$ ). Cette divergence a pour conséquence que deux particules parfaitement lisses (une fixe et l'autre soumise à son poids, par exemple) n'entreront en contact qu'au bout d'un temps infini. En réalité, les particules ne sont jamais parfaitement lisses et possèdent des aspérités en surface. La taille caractéristique de ces aspérités s'appelle la rugosité de surface de la particule et est noté  $k$ . Les particules entrent donc en contact lorsque leurs aspérités respectives entrent en contact, alors que le film de fluide n'a pas été entièrement évacué.

Cette force de lubrification provient donc de la géométrie de l'écoulement entre deux particules lorsque la distance les séparant tend vers 0. Cela signifie que pour capter ces effets numériquement, il faut résoudre l'écoulement à cette échelle. Ici, nous utilisons un maillage dont la taille des cellules  $\Delta x$  est constante et nous ne pouvons donc pas résoudre l'écoulement à cette échelle (sauf à mailler l'ensemble du domaine de simulation avec un raffinement défiant l'entendement ce qui n'est pas envisageable). On utilise alors une relation de fermeture permettant d'ajouter "à la main" ces effets qui ne sont pas résolus par nos simulations. Le modèle de fermeture utilisé ici est celui de BRENNER (1961). Il donne l'expression de la force de lubrification  $\mathbf{F}_{lub}$  s'appliquant sur la particule  $i$  lorsqu'elle s'approche d'une autre particule, numérotée  $j$  :

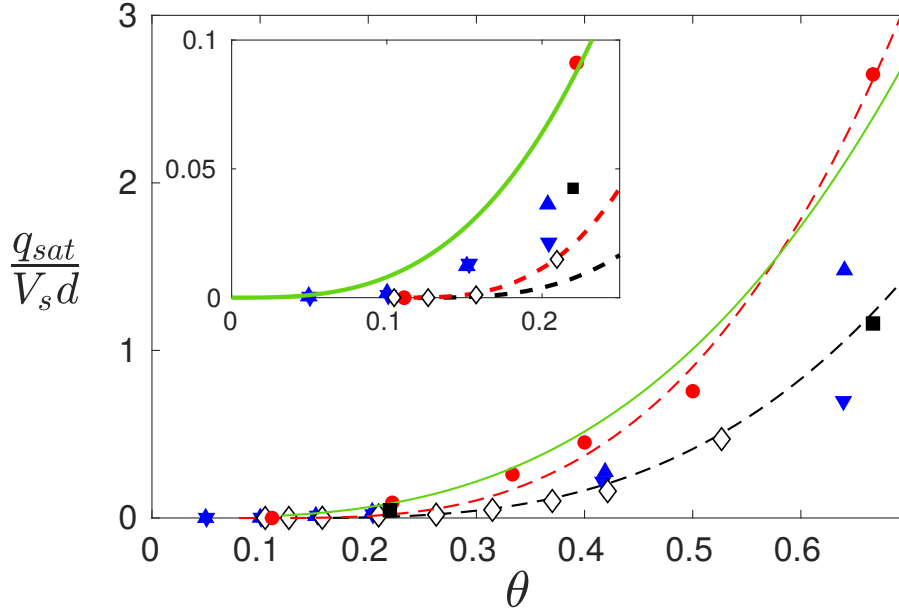
$$\mathbf{F}_{lub} = -6\pi\eta_f \frac{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} - \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}}{\delta + k_e} \left( \frac{R_i R_j}{R_i + R_j} \right)^2 \mathbf{n}, \quad (4.41)$$

où  $k_e$  représente la taille effective des rugosités des particules  $i$  et  $j$  et permet de régulariser la force de lubrification pour  $\delta = 0$ . En pratique, cette force est activée seulement lorsque la distance  $\delta$  est inférieure à une distance critique  $\Delta_{lub}$ . Seule la contribution normale des effets de lubrification est modélisée ici (dans la direction  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{\|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i\|}$ ); les effets hydrodynamiques dans la direction tangentielle étant négligés. On ne rentrera pas dans les détails de leur modélisation ici mais il est important de noter qu'ils ne sont pas pris en compte.

Ici, on utilise le modèle de fermeture (4.41) en prenant  $k_e/d = 2 \times 10^{-4}$  et  $\Delta_{lub}/d = 0.4$ . DERKSEN (2011) utilise aussi un modèle de lubrification dont les paramètres  $k_e/d$  et  $\Delta_{lub}/d$  ont les mêmes valeurs qu'ici. On peut aussi noter que lors des expériences, on ne peut pas "désactiver" les effets de

lubrification, que ce soit dans la direction normale ou tangente. On pourra donc aussi comparer les résultats obtenus ici à ceux d'expériences.

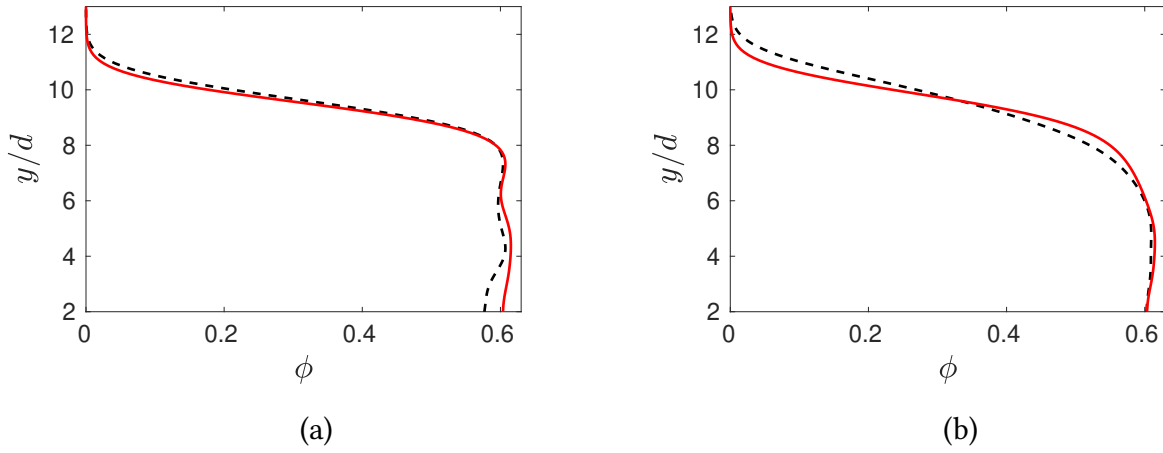
On a effectué deux simulations en activant le modèle de fermeture ci-dessus, pour les paramètres adimensionnés  $Re_p = 1$  et  $\theta = 0.22$  ou  $\theta = 0.67$ . Nous nous limiterons à l'étude du régime permanent. Le débit granulaire obtenu est représenté sur la figure 4.34.



**FIGURE 4.34** – Débit granulaire adimensionné par  $V_s d$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour  $Re_p = 1$ . (■) : présente méthode AVEC le modèle de lubrification ; (●) : présente méthode SANS le modèle de lubrification. La fin de la légende est la même que pour la figure 4.4 (b).

On constate que le débit granulaire obtenu diminue environ d'un facteur 2 lorsqu'on active le modèle de lubrification. Pour  $\theta = 0.67$ , on obtient un débit supérieur à celui qu'obtient DERKSEN (2011) pour  $Re_p = 0.505$  et inférieur à celui qu'il obtient pour  $Re_p = 1.48$ . L'accord est remarquable avec le modèle de CHARRU *et al.* (2004) (équation (4.19)). Pour  $\theta = 0.22$ , on ne retombe pas sur cette corrélation, mais on obtient tout de même un débit du même ordre que celui de DERKSEN (2011) pour  $Re_p = 1.48$ . La lubrification a donc un rôle important dans le transport de grains (du moins sa contribution normale) et sa prise en compte permet d'obtenir des débits de grains bien plus proches de ceux observés dans les expériences et les simulations prenant explicitement en compte les effets de lubrification.

La figure 4.35 présente les profils moyens de fraction volumique solide  $\phi(y)$  (dans le régime stationnaire) avec et sans prise en compte de ces effets.



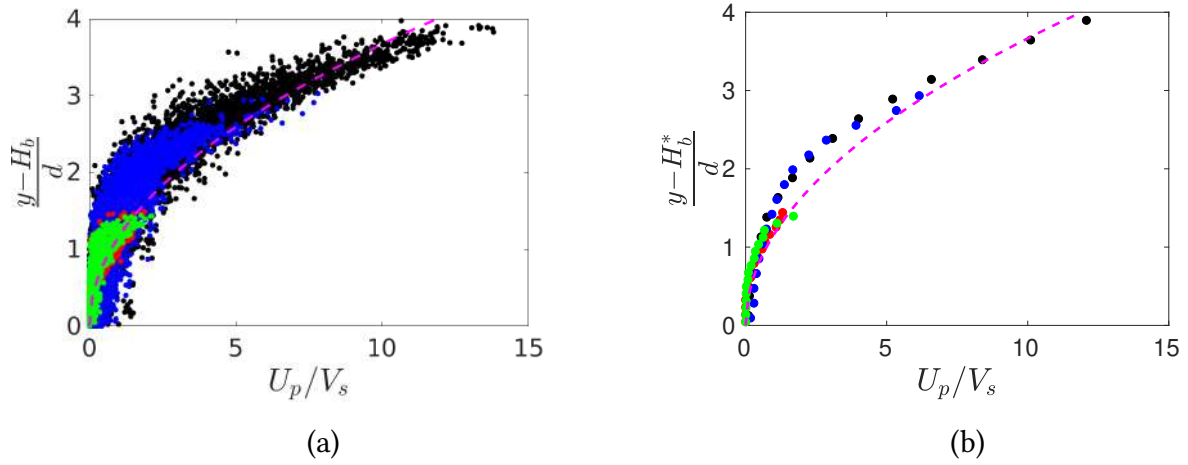
**FIGURE 4.35** – Profils moyens de fraction volumique solide  $\phi$  dans le régime permanent; (noir - -) : SANS; (rouge -) : AVEC, l'activation du modèle de lubrification (4.41) pour  $Re_p = 1$  et (a) :  $\theta = 0.22$ ; (b) :  $\theta = 0.67$ . La fraction volumique est calculée avec la méthode d'homogénéisation décrite dans la section 5.1, avec  $h_g = d$ .

On observe sur la figure 4.35 que  $\phi$  passe de sa valeur maximale  $\phi_m \simeq 0.6$  à 0 de façon plus abrupte lorsque le modèle de lubrification est utilisé et que cet effet est plus marqué pour le plus grand nombre de Shields (*i.e.* lorsque la couche de grains mobiles est plus épaisse). On remarque aussi que le fond du lit s'est compacté davantage lorsque l'on a activé le modèle de lubrification. Les valeurs de  $H_m$ ,  $h_{bed}$ ,  $H_b^*$ , *etc...* varient légèrement avec l'utilisation du modèle de lubrification. Par exemple,  $H_m$  diminue de  $0.46d$  pour  $\theta = 0.67$  et de  $0.21d$  pour  $\theta = 0.22$  alors que  $H_b^*$  augmente de  $0.37d$  pour  $\theta = 0.67$  et diminue de  $0.14d$  pour  $\theta = 0.22$ . Nous ne n'étudions pas l'influence des effets de la lubrification sur toutes les hauteurs définies précédemment et nous nous limiterons à l'étude de l'épaisseur de la couche de grains mobiles. Pour quantifier l'effet de la lubrification sur cette dernière, on reporte les valeurs de  $\Delta H$  et de  $\delta h$  dans le tableau 4.2. On prend  $\Delta H = \Delta_{U_0}^* H$  (*i.e.* la version de  $\Delta H$  où  $H_b$  est basée sur la vitesse seuil  $V_{seuil} = 1.67 \times 10^{-3} \dot{\gamma} d$  et est corrigée "à la main") et où  $\delta h$  est définie par l'équation (4.26).

		SANS modèle de lubrification	AVEC modèle de lubrification
$\Delta H$	$\theta = 0.22$	$2.05 d$	$2.06 d$
	$\theta = 0.67$	$4.08 d$	$3.03 d$
$\delta h$	$\theta = 0.22$	$0.74 d$	$0.76 d$
	$\theta = 0.67$	$1.09 d$	$1.02 d$

**TABLE 4.2** – Épaisseurs caractéristiques de la couche de grains mobiles  $\Delta H$  et  $\delta h$  en utilisant, ou non, le modèle de lubrification (4.41) pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.22$  et  $\theta = 0.67$ . On prend  $\Delta H = \Delta_{U_0}^* H$ .

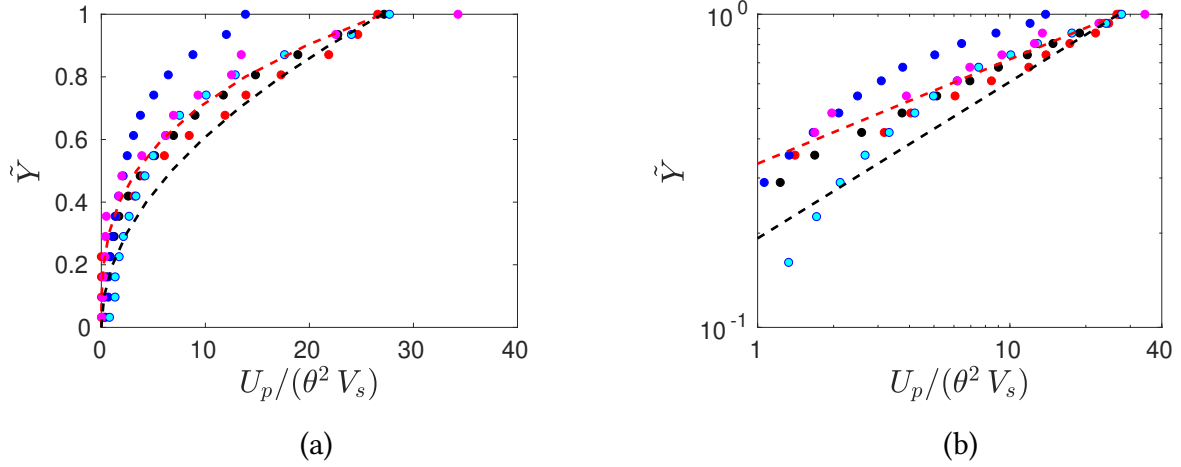
On constate que, pour  $\theta = 0.67$ , l'épaisseur de grains en mouvement  $\Delta H$  diminue lorsque l'on active le modèle de lubrification mais qu'elle reste constante pour  $\theta = 0.22$ . L'épaisseur caractéristique  $\delta h$  semble quant à elle ne pas dépendre de l'activation, ou non, du modèle de lubrification. On trace maintenant les profils de vitesse longitudinale  $U_p(y)$  sur la figure 4.36.



**FIGURE 4.36** – Profils de vitesse longitudinale des particules, adimensionnée par la vitesse de Stokes, pour  $Re_p = 1$ . (●) :  $\theta = 0.67$  SANS utiliser le modèle de lubrification, (●) :  $\theta = 0.67$  AVEC le modèle de lubrification, (●) :  $\theta = 0.22$  AVEC le modèle de lubrification et (●) :  $\theta = 0.22$  SANS utiliser le modèle de lubrification. (a) : nuage de points (un point par particule et par instant du régime permanent utilisé pour le calcul des moyennes). (b) : profils moyens dans le régime permanent obtenus via la méthode "simple" de prise de moyenne, décrite dans la section 5.2.1.2, avec 16 sous-domaines dans l'épaisseur de la couche mobile. (---) : profil parabolique du modèle de MOUILLERON et al. (2009) (équation (4.12)).

La figure 4.36 (a) montre que, pour une altitude donnée, les particules ont la même valeur de vitesse. Pour  $\theta = 0.67$ , les particules remontent moins haut au-dessus du lit si on prend en compte les effets de lubrification et le nuage de points semble alors tronqué. Pour  $\theta = 0.22$ , les nuages de points se superposent relativement bien et les mêmes plages de hauteurs et de vitesses sont explorées par les particules, que la lubrification soit prise en compte ou non. Si on regarde maintenant les profils moyens sur la figure 4.36 (b), on constate que les profils moyens avec, ou sans, le modèle de lubrification se superposent. On voit aussi ici que pour  $\theta = 0.67$ , la hauteur maximale (et donc la vitesse maximale atteinte) par les grains dépend de la prise en compte ou non de la lubrification, alors que ce n'est pas le cas pour  $\theta = 0.22$ . Cela signifie que l'échelle de vitesse maximale n'est plus  $\theta^2 V_s = \theta \dot{\gamma} d$  lorsqu'on prend en compte les effets de lubrification. Afin de pouvoir tracer ces profils (avec lubrification) sur une même courbe, on met à l'échelle le profil pour  $\theta = 0.67$  "à la main" en le multipliant par  $27/U_{p,max} \simeq 2$  avant de le normaliser par  $\theta^2 V_s$  ( $27\theta^2 V_s$  étant la vitesse maximale constatée sans la lubrification pour  $Re_p = 1$ ). On trace alors les profils obtenus sur la figure 4.37.

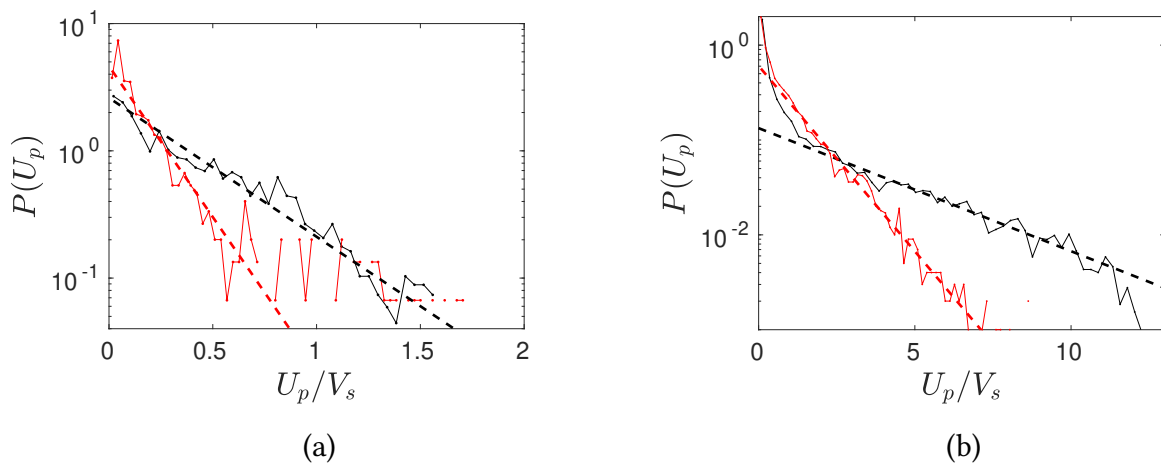




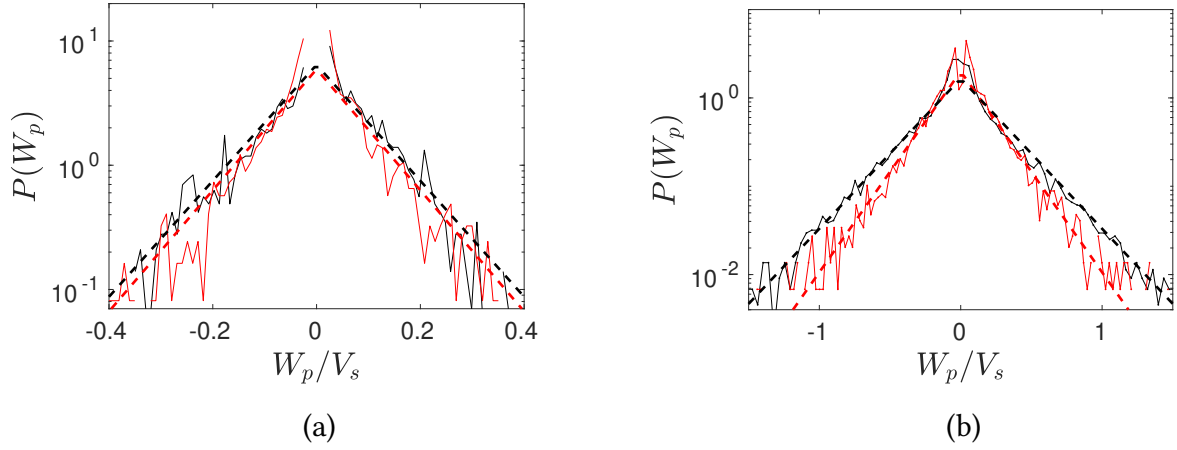
**FIGURE 4.37** – Profils de vitesse longitudinale normalisée des particules pour  $Re_p = 1$  (via la méthode "simple" prise de moyenne volumique avec 16 sous-domaines dans la couche de grains mobiles). Les marqueurs sont identiques à ceux de la figure 4.36. On a ajouté les marqueurs (•) qui correspondent au cas  $\theta = 0.67$  AVEC le modèle de lubrification mais pour lequel on a multiplié la vitesse par  $27/U_{max} \simeq 2$  afin de la "mettre à l'échelle". (a) : échelle linéaire. (b) : échelle log-log. (noir - -) : profil parabolique d'équation  $U_p/(\theta^2 V_s) = 27 \tilde{Y}^2$ ; (rouge - -) : profil cubique obtenu pour  $Re_p = 1$ , sans la prise en compte de la lubrification,  $U_p/(\theta^2 V_s) = 27 \tilde{Y}^3$ .

La figure 4.37 (a) montre que l'on peut toujours normaliser les profils de vitesse particulière afin d'obtenir une courbe "universelle" lorsque l'on prend en compte les effets de lubrification. Toutefois, comme expliqué précédemment, le facteur de normalisation n'est plus simplement  $\theta^2 V_s$ . On peut tout de même noter que la courbe "universelle" semble avoir la même forme (en  $\tilde{Y}^3$ ) que sans utiliser de modèle de lubrification. La figure 4.37 (b) montre que l'exposant de  $\tilde{Y}$  dans l'expression du profil de vitesse granulaire est effectivement 3 avec le modèle de lubrification (au moins pour les vitesses vérifiant  $U_p \geq 4 \theta^2 V_s$ ).

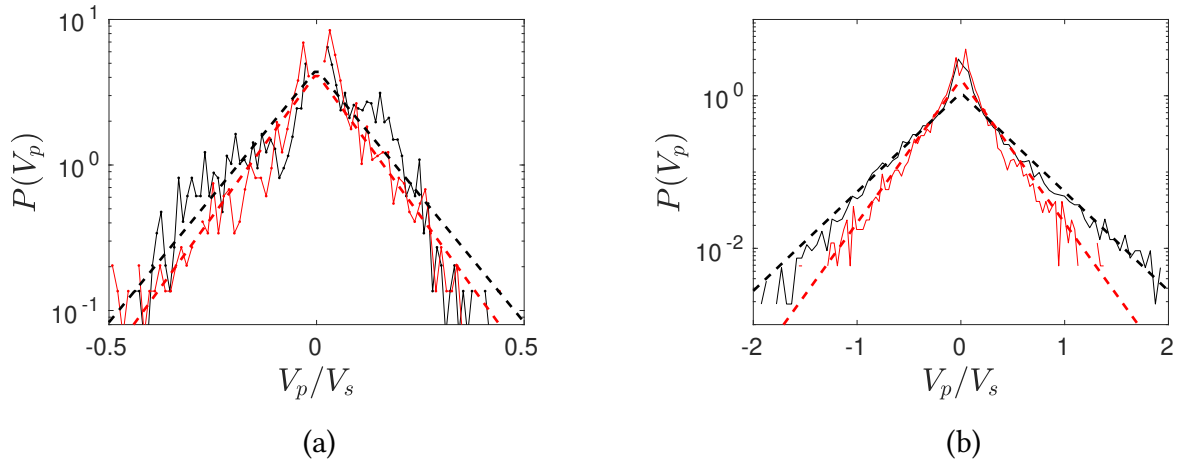
On trace les PDF pour la vitesse des grains dans le sens de l'écoulement  $U_p$  sur la figure 4.38, dans la direction transversale  $W_p$  sur la figure 4.39 et dans la direction verticale  $V_p$  sur la figure 4.40.



**FIGURE 4.38** – Distributions de probabilité de vitesse longitudinale des grains  $U_p$ , adimensionnée par la vitesse de Stokes, dans le sens de l'écoulement pour  $Re_p = 1$ . (a) :  $\theta = 0.22$ ; (b) :  $\theta = 0.67$ ; (-) : SANS modèle de lubrification; (- -) : AVEC modèle de lubrification. Ajustements par des distributions exponentielles (équation (4.31)) avec, pour la figure (a), (- -) :  $\bar{U}_p = 0.390 V_s = 9.75 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ ; (- -) :  $\bar{U}_p = 0.183 V_s = 4.57 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$  et pour la figure (b), (- -) :  $\bar{U}_p = 3.65 V_s = 0.304 \dot{\gamma} d$ ; (- -) :  $\bar{U}_p = 1.11 V_s = 9.26 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ .



**FIGURE 4.39** – Distributions de probabilité de vitesse transversale des grains  $W_p$ , adimensionnée par la vitesse de Stokes, perpendiculairement à l'écoulement pour  $Re_p = 1$ . (a) :  $\theta = 0.22$ ; (b) :  $\theta = 0.67$ ; (–) : SANS modèle de lubrification; (–) : AVEC modèle de lubrification. Ajustements par des distributions exponentielles (équation (4.32)) avec, pour la figure (a), (–) :  $\delta_W = 9.30 \times 10^{-2} V_s = 2.32 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ ; (–) :  $\delta_W = 8.91 \times 10^{-2} V_s = 2.23 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$  et pour la figure (b), (–) :  $\delta_W = 0.255 V_s = 1.87 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ ; (–) :  $\delta_W = 0.191 V_s = 1.59 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ .



**FIGURE 4.40** – Distributions de probabilité de vitesse verticale des grains  $V_p$ , adimensionnée par la vitesse de Stokes, pour  $Re_p = 1$ . (a) :  $\theta = 0.22$ ; (b) :  $\theta = 0.67$ ; (–) : SANS modèle de lubrification; (–) : AVEC modèle de lubrification. Ajustements par des distributions exponentielles (équation (4.33)) avec, pour la figure (a), (–) :  $\delta_V = 0.125 V_s = 3.12 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ ; (–) :  $\delta_V = 0.111 V_s = 2.78 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$  et pour la figure (b), (–) :  $\delta_V = 0.335 V_s = 2.79 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ ; (–) :  $\delta_V = 0.231 V_s = 1.92 \times 10^{-2} \dot{\gamma} d$ .

La figure 4.38 montre que les distributions de probabilité de vitesse des grains dans le sens de l'écoulement peuvent encore être approchées par des distributions exponentielles lorsqu'on active le modèle de lubrification. La vitesse moyenne des particules est alors réduite d'un facteur 2 environ pour  $\theta = 0.22$  et 3 pour  $\theta = 0.67$ . Les figures 4.39 et 4.40 montrent que la forme des distributions des vitesses perpendiculaires au sens de l'écoulement n'est pas non plus affectée par l'utilisation d'un modèle de lubrification, on utilise aussi les distributions (4.32) et (4.33) ici. La largeur de ces distributions diminue lorsque l'on prend en compte la lubrification et cette diminution est plus grande pour les grandes valeur de nombre de Shields  $\theta$ . Elle est de 5 – 10% pour  $\theta = 0.22$  et de 25 – 30% pour  $\theta = 0.67$ . L'effet principal de l'utilisation d'un modèle de lubrification sur les distributions de vitesses des grains est donc une diminution de la vitesse des particules dans le sens de l'écoulement.

On a déjà remarqué que  $\theta^2 V_s = \theta \dot{\gamma} d$  n'était plus la bonne échelle pour décrire la vitesse des particules dans le sens de l'écoulement. Les figures 4.39 et 4.40 montrent que  $\theta V_s = \dot{\gamma} d$  n'est plus la bonne échelle de vitesse pour les vitesses perpendiculaires à l'écoulement. En effet, le rapport de la largeur  $\delta_W$  lorsqu'on active le modèle de lubrification et de celle lorsqu'il reste inactif serait constant par rapport à  $\theta$  si c'était le cas (de même pour  $\delta_V$ ).

Grâce aux ajustements de la figure 4.38, on obtient les valeurs de vitesse moyenne des particules  $\bar{U}_p^{PDF}$ . On calcule également la vitesse moyenne  $\bar{U}_p^{seuil}$  en prenant  $V_{seuil} = 0.02 V_s$  et on présente les valeurs de vitesse moyenne obtenues dans le tableau 4.3. Connaissant le débit volumique de grains, on détermine aussi  $n_s^{seuil}$  et  $n_s^{PDF}$  à l'aide de la relation (4.17) et on présente ensuite ces valeurs dans le tableau 4.4. Nous n'étudierons ni les vitesses moyennes  $\bar{U}_p^{(1)}$  et  $\bar{U}_p^{dist}$ , ni les densités surfaciques de grains mobiles qui y sont associées,  $n_s^{(1)}$  et  $n_s^{dist}$ , ici.

		SANS modèle de lubrification	AVEC modèle de lubrification
$\theta = 0.22$	$\bar{U}_p^{seuil} / V_s$	0.46	0.28
	$\bar{U}_p^{PDF} / V_s$	0.39	0.18
$\theta = 0.67$	$\bar{U}_p^{seuil} / V_s$	1.65	0.73
	$\bar{U}_p^{PDF} / V_s$	3.65	1.11

**TABLE 4.3** – Vitesses moyennes des grains de la couche de grains mobiles  $\bar{U}_p^{seuil}$  et  $\bar{U}_p^{PDF}$ , adimensionnée par la vitesse de Stokes, en utilisant, ou non, le modèle de lubrification (4.41) pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.22$  et  $\theta = 0.67$ .  
Pour calculer  $\bar{U}_p^{seuil}$ , on utilise  $V_{seuil} = 0.02 V_s$ .

		SANS modèle de lubrification	AVEC modèle de lubrification
$\theta = 0.22$	$n_s^{seuil} d^2$	0.38	0.32
	$n_s^{PDF} d^2$	0.46	0.48
$\theta = 0.67$	$n_s^{seuil} d^2$	3.07	3.02
	$n_s^{PDF} d^2$	1.39	2.00

**TABLE 4.4** – Densités surfaciques de grains mobiles  $n_s^{seuil} d^2$  et  $n_s^{PDF} d^2$  en utilisant, ou non, le modèle de lubrification (4.41) pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.22$  et  $\theta = 0.67$ .

On peut voir sur le tableau 4.3 que la vitesse moyenne des particules diminue lorsque l'on prend en compte les effets de lubrification (d'un facteur 2 à 3 environ ici). Plus le nombre de Shields est grand, plus cette diminution est grande (en proportion). De plus, les différentes définitions de la vitesse moyenne ne "répondent" pas de la même façon au changement de modèle de contact et aux variations du nombre de Shields.

Le tableau 4.4 montre que la densité surfacique de particules mobiles ne dépend pas, ou peu, de l'utilisation du modèle de lubrification. Pour  $\theta = 0.22$ ,  $n_s$  ne semble dépendre que de la définition que l'on utilise. Pour  $\theta = 0.67$ ,  $n_s^{seuil}$  ne dépend pas de la lubrification et  $n_s^{PDF}$  augmente d'environ 50% si on prend en compte la lubrification.

On a vu que le débit volumique de grains était divisé par environ 2 si on ajoutait le modèle de lubrification. Puisque  $n_s^{seuil}$  ne dépend pas de l'utilisation, ou non, d'un tel modèle, alors d'après la relation (4.17), la vitesse moyenne des particules  $\bar{U}_p^{seuil}$  doit être divisé par environ 2. C'est effectivement ce que l'on constate dans le tableau 4.3. Le couple  $(\bar{U}_p^{seuil}, n_s^{seuil})$  permet de décorrélérer la "dépendance à la lubrification" :  $\bar{U}_p^{seuil}$  en dépend mais pas  $n_s^{seuil}$ . Pour les autres couples de vitesse moyenne et densité surfacique de grains mobiles, les deux varient lorsqu'on active, ou désactive, le modèle de lubrification. Les définitions basées sur un seuil de vitesse ne sont pas les plus élégantes mais ce sont sans doute celles qui sont les plus simples à interpréter. On peut donc en conclure que la quantité de particules en mouvement ne dépend pas des effets de lubrification mais que leur vitesse moyenne si ; plus les effets de lubrification sont intenses, moins les particules vont vite.

Dans le cadre de cette étude, sans l'ajout du modèle de lubrification présenté ci-dessus, nous résolvons l'écoulement de fluide entre les grains jusqu'à ce que les fonctions  $\alpha$  définissant la fraction volumique solide de chaque particule se recouvrent, c'est-à-dire pour  $\delta \sim \Delta$ . Nous captons donc les effets de lubrification uniquement lorsqu'ils sont faibles ( $\delta \gg \Delta$ ) et puis pour  $\delta \sim \Delta$  on cesse de les capter et la force  $F_{lub}$  sature. Cela correspond donc à prendre une rugosité du même ordre de grandeur que l'épaisseur caractéristique des frontières IBM  $k_e \sim \Delta$ . Afin d'appuyer cet affirmation, on peut retourner à la section 3.4 et comparer les cas C et D. Ils possèdent le même raffinement spatial mais des épaisseurs de frontières immergées différentes (comparées au diamètre des grains). Le débit granulaire est plus faible pour le cas D or c'est le cas qui correspond à la plus petite taille effective des rugosités. Ceci est cohérent car plus la rugosité est faible, plus la dissipation visqueuse est grande et donc, plus le débit est faible.

Pour conclure sur la lubrification, le principal résultat est que le débit granulaire dépend fortement de sa prise en compte. La force notée  $F_{lub}$  cache en fait la dissipation visqueuse due au drainage du film liquide séparant deux particules lors d'un contact : moins les particules sont rugueuses, plus les forces de lubrification sont grandes, et donc plus la dissipation est forte et alors plus le débit granulaire est faible. Ici en passant de  $k_e/d \sim \Delta x/d = 0.1$  à  $k_e/d = 2 \times 10^{-4}$ , on a divisé par environ 2 le débit de grains.

D'après la relation (4.17), cette variation du débit se répartit entre la densité surfacique de grains mobiles et leur vitesse moyenne. C'est la vitesse moyenne des particules qui varie le plus alors que leur densité surfacique n'en est pratiquement pas impactée (en s'appuyant sur les définitions indicées "seuil"). Bien que le nombre de particules mobiles par unité de surface ne dépende pas des effets de lubrification, leur répartition verticale s'en trouve tout de même modifiée. La compacité  $\phi$  passe de façon plus abrupte de sa valeur maximale à 0 si on active le modèle de lubrification. Il en résulte une légère diminution de la hauteur moyenne du lit de grains (qui est au moins en partie due à la compaction du lit en profondeur) ainsi qu'une diminution de l'épaisseur de la couche de grains mobile. Cette dernière n'est pas modifiée pour  $\theta = 0.22$  et diminue d'environ 25% pour  $\theta = 0.67$  (en s'appuyant sur l'épaisseur  $\Delta H$ ). L'épaisseur caractéristique  $\delta h$  ne dépend quant à elle pas des effets de lubrification. Cela signifie que le profil de  $\phi U_p(y - h_{bed})$  ne dépend pas de la force de lubrification (normale).

Ensuite, le profil de vitesse normalisée des particules n'est pas modifié par les effets de lubrification bien que l'échelle de vitesse à prendre en compte ne soit plus  $\theta^2 V_s$  dans ce cas là. Les distributions de vitesses des grains peuvent toujours être décrite comme des décroissances exponentielles. Les paramètres de ces distributions  $(\bar{U}_p, \delta_V \text{ et } \delta_W)$  dépendent des effets de lubrification. Nous avons déjà évoqué la diminution de la vitesse moyenne des particules. Les dispersions des vitesses perpendi-

culairement à l'écoulement sont du même ordre de grandeur avec ou sans utilisation du modèle de lubrification. Si on les normalise à l'aide de la vitesse de Stokes, elles diminuent de 5% pour  $\theta = 0.22$  et de 25% pour  $\theta = 0.67$ . Leur évolution n'est donc plus linéaire avec  $\theta$  et alors  $\delta_V/\dot{\gamma}d$  et  $\delta_W/\dot{\gamma}d$  ne sont plus indépendant du nombre de Shields  $\theta$ .

On rappelle que le modèle utilisé ici néglige les effets tangentiels de lubrification et que tout ce qui précède n'est *a priori* plus vrai si on utilisait une modélisation de l'ensemble des effets de lubrification.



# Chapitre 5

## Changement d'échelle & Milieux effectifs

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>De l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique . . . . .</b>	<b>126</b>
5.1.1	Fractions volumiques locales . . . . .	127
5.1.2	Grandeurs mésoscopiques . . . . .	128
5.1.3	Conservation de la masse à l'échelle mésoscopique . . . . .	128
5.1.4	Conservation de la quantité de mouvement à l'échelle mésoscopique . . . . .	130
5.1.5	Fonction de pondération & volume élémentaire représentatif . . . . .	132
<b>5.2</b>	<b>Description mésoscopique d'un lit de grains soumis à un écoulement cisailé</b>	<b>134</b>
5.2.1	Cinématique des phases équivalentes . . . . .	134
5.2.1.1	Présentation des champs de vitesse moyenne . . . . .	134
5.2.1.2	Comparaison avec une autre méthode de prise de moyenne . . . . .	136
5.2.2	Bilan de quantité de mouvement de la phase fluide . . . . .	138
5.2.3	Bilan de quantité de mouvement de la phase granulaire . . . . .	142
5.2.4	Bilan de quantité de mouvement de la phase de mélange . . . . .	145
5.2.5	Pression granulaire et différences de contraintes normales . . . . .	147
5.2.6	Couplage entre les phases fluide et granulaire - $n\langle \mathbf{f} \rangle^p$ . . . . .	149
5.2.7	Rhéologie des phases équivalentes . . . . .	154
5.2.7.1	Phase fluide . . . . .	154
5.2.7.2	Phase granulaire . . . . .	158
5.2.7.3	Phase de mélange . . . . .	163
5.2.7.4	Article : Un nouveau modèle de viscosité effective de la phase de mélange . . . . .	166
<b>5.3</b>	<b>De l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique . . . . .</b>	<b>188</b>
5.3.1	Homogénéisation de la transition fluide - milieux granulaire immergé . . . . .	188
5.3.2	Condition limite équivalente . . . . .	192

---

Dans ce chapitre, on effectue un changement d'échelle ; dans le sens où l'on cesse de décrire le lit de grains comme une population de particules ayant chacune une position et une vitesse (quantités microscopiques) et on souhaite en obtenir une description continue. En fait, on a déjà manipulé ce type de grandeur dans les chapitres précédents, lorsqu'on a tracé des profils de vitesse moyenne (via la méthode précédemment dénommée prise de moyenne volumique "simple") ou de fraction volumique des grains (via la méthode développée dans ce chapitre). JACKSON (2000) développe rigoureusement le formalisme de changement d'échelle à l'aide d'intégrales volumiques. Il en déduit le système d'équations décrivant l'évolution des phases équivalentes granulaire et fluide, que nous appellerons système mésoscopique. Certains des termes de ce système s'expriment naturellement à partir des grandeurs mésoscopiques et d'autres à partir de grandeurs microscopiques. À l'aide de la méthode IBM-DEM utilisée ici, nous sommes en mesure de calculer tous les termes des équations mésoscopiques à partir des données microscopiques. L'objectif est ensuite d'exprimer ce système d'équations uniquement à l'aide de grandeurs mésoscopiques et non plus à partir des grandeurs microscopiques, afin de fermer le problème mésoscopique.

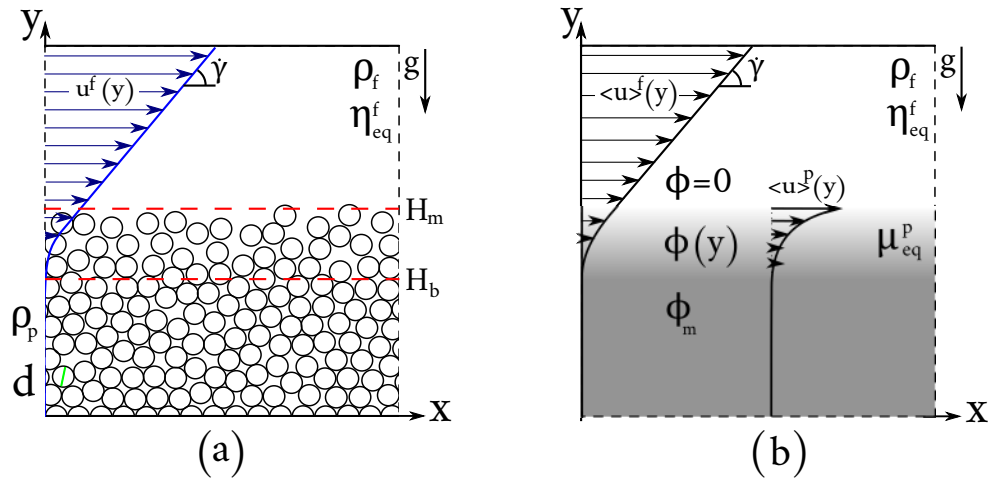
Finalement, on tentera de décrire le système considéré avec une échelle de description encore plus grande, à l'aide de grandeurs macroscopiques. Le problème de l'écoulement d'un lit de grains cisailé par le fluide environnant est alors réduit à une condition limite équivalente pour l'écoulement du fluide.

Cette façon d'aborder ce problème à échelles multiples s'inscrit dans un ensemble de méthodes appelées méthodes d'homogénéisations (WHITAKER (2013)). L'objectif de ces méthodes est de proposer des équations effectives qui décrivent le comportement du système considéré dans la limite où la petite échelle tend vers 0 (DARCY (1856); TAYLOR (1953)). Les hétérogénéités présentes à petite échelle sont alors effacées du problème ; qu'elles soient périodiques, pseudo-périodiques, ou aléatoires avec des propriétés de stationnarité et d'ergodicité. Dans le cas d'hétérogénéités périodiques, l'utilisation de méthodes s'appuyant sur des développements asymptotiques des équations décrivant la petite échelle WHITAKER (1986) est possible et pour des hétérogénéités aléatoires, on effectue des prises de moyennes (SLATTERY (1967); JACKSON (2000)) (qui se justifient via une description du problème en processus de MARKOV (KOLMOGOROV (1936))). C'est dans ce second contexte (hétérogénéités aléatoires et prises de moyennes) que s'inscrit la méthode de passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique présentée ici. Le second changement d'échelle, pour passer de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique, s'appuie quant à lui sur une méthode asymptotique (MEI et VERNESCU (2010); ZAMPOGNA et BOTTARO (2016); BOTTARO (2019)).

## 5.1 De l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique

Nous avons réalisé des simulations complètement résolues d'un lit granulaire immergé (échelle microscopique) et nous voulons le décrire à l'aide de champs continus (échelle mésoscopique). Ce changement d'échelle est schématisé sur la figure 5.1. Pour effectuer le changement d'échelle allant de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique, JACKSON (2000) propose une procédure de prise de moyenne spatiale. Les idées principales de cette méthode sont développées ci-dessous, pour plus de détails voir JACKSON (1997, 2000). Pour rappel, ici nous étudions un problème stationnaire et nous effectuons donc des moyennes temporelles. Pour des raisons de lisibilité, nous omettons cet aspect de la méthode lorsqu'on présente les méthodes de prise de moyenne spatiale mais les grandeurs présentées sont systématiquement moyennées temporellement.





**FIGURE 5.1** – Schéma représentant le problème d'un écoulement granulaire cisaillé à l'échelle microscopique (a) et à l'échelle mésoscopique (b).

### 5.1.1 Fractions volumiques locales

Lors du passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique, le volume local occupé par les grains est décrit par la fraction volumique de solide  $\phi$ . De façon équivalente, le volume occupé par le fluide dans le milieu poreux associé au lit granulaire est caractérisé par la fraction volumique fluide  $\epsilon$ . Bien entendu par conservation de la masse totale du système,  $\epsilon + \phi = 1$  mais la fraction volumique de chaque phase n'est pas nécessaire constante (compressibilité du milieu granulaire). Les fractions volumiques de fluide  $\epsilon$  et de solide  $\phi$  sont définies localement, à la position  $\mathbf{x}$ , par :

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \int_{V_f} g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dv_{\mathbf{y}}, \quad (5.1)$$

et

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_p \int_{V_p} g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dv_{\mathbf{y}}, \quad (5.2)$$

où  $g$  est une fonction de pondération, différentiable, normalisée sur l'ensemble du domaine (*i.e.*  $\int_{V_{tot}} g dv = 1$ ) et avec une extension spatiale caractéristique  $h_g$ ;  $V_p$  correspond au volume de la particule  $p$ ,  $V_f$  au volume occupé par le fluide. On peut remarquer qu'on a bien  $\epsilon + \phi = 1$  puisque  $V_f + \sum_p V_p = V_{tot}$ . Si en plus, on suppose que les grains sont rigides, sphériques et tous identiques, on peut aussi définir la densité volumique de grains par :

$$n(\mathbf{x}) = \sum_p g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|), \quad (5.3)$$

où  $\mathbf{x}_p$  est la position du centre de la particule  $p$ . On peut remarquer qu'en partant de la définition de  $\phi$  (équation (5.2)) et en effectuant un développement limité de  $g$  autour de  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p$ , on aboutit à la relation attendue entre  $\phi$  et  $n$  :

$$\phi(\mathbf{x}) = V_p n(\mathbf{x}). \quad (5.4)$$

Cette relation correspond au terme d'ordre 0 du développement de limité et le terme d'ordre 1 est nul. Ce développement suppose que  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_p \ll h_g$  pour toutes les valeurs de  $\mathbf{y}$ . On a donc implicitement supposé que le rayon  $d/2$  des particules satisfaisait l'inégalité  $d/2 \ll h_g$  afin d'obtenir l'équation (5.4). Cette condition correspond donc à l'hypothèse de séparation d'échelle nécessaire à la validité de cette approche et mentionnée précédemment. On a également supposé que toutes les particules possédait le même volume  $V_p$  afin d'aboutir à la relation (5.4).

### 5.1.2 Grandeurs mésoscopiques

On peut ensuite définir différentes moyennes pour une grandeur arbitraire  $G$ . ( $G$  peut par exemple représenter un champ de vitesse ou de contrainte.) :

- La moyenne sur la phase fluide (fluid phase average)  $\langle G \rangle^f$  définie par :

$$\langle G \rangle^f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon(\mathbf{x})} \int_{V_f} G(\mathbf{y}) g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dv_{\mathbf{y}}. \quad (5.5)$$

- La moyenne sur la phase solide (solid phase average)  $\langle G \rangle^s$  définie par :

$$\langle G \rangle^s(\mathbf{x}) = \frac{1}{\phi(\mathbf{x})} \sum_p \int_{V_p} G(\mathbf{y}) g(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dv_{\mathbf{y}}. \quad (5.6)$$

- La moyenne sur la phase granulaire (particle phase average)  $\langle G \rangle^p$  définie par :

$$\langle G \rangle^p(\mathbf{x}) = \frac{1}{n(\mathbf{x})} \sum_p G^p g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p|), \quad (5.7)$$

où  $G^p$  est la valeur de la quantité  $G$  pour la particule  $p$  (sa vitesse de translation dans une direction donnée par exemple).

Ces différentes moyennes volumiques (notées avec des  $\langle \cdot \rangle$ ) définissent les grandeurs qu'on qualifera de mésoscopiques, contrairement aux valeurs locales de  $G$  qu'on appelle des quantités microscopiques.

La moyenne sur la phase granulaire (5.7) est une simplification de la moyenne sur la phase solide (5.6) dans le cas de particules non déformables. On introduit ces deux notations car certains termes des équations développées par la suite apparaissent naturellement via l'une ou l'autre de ces formulations. Dans le cas de particules indéformables, la vitesse en tous points de la particules est n'est pas quelconque et peut se décomposer en une translation et une rotation. Sachant cela et en effectuant un développement limité de  $g$  au centre des particules, on peut obtenir l'équation (5.7) à partir de l'équation (5.6) (comme pour obtenir la relation (5.4)). De façon générale, pour des particules solides, les quantités notées  $\langle \cdot \rangle^p$  sont égales aux quantités notées  $\langle \cdot \rangle^s$ , à l'ordre 0 en  $d/L$ . Dans la suite, on garde une écriture rigoureuse des différents termes mais on parle indifféremment des grandeurs "solides" ou "particulaires", que l'on réuni sous le même nom de "granulaire".

### 5.1.3 Conservation de la masse à l'échelle mésoscopique

#### Modèle à deux phases

Les grains sont considérés solides et le fluide interstitiel incompressible, les équations de conservation de la masse ou du volume sont donc équivalentes ici. La méthode de prise de moyenne volumique développée dans ce chapitre peut être appliquée à l'équation microscopique de conservation de la masse, aussi appelée équation de continuité. Pour la phase granulaire, on effectue par exemple un bilan de masse sur un volume  $dV$  entre les instant  $t$  et  $t + dt$  afin d'obtenir l'équation de conservation correspondante pour cette phase. On obtient alors les équations mésoscopiques de conservation de la masse pour les deux phases apparentes, fluide et granulaire :

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot (\epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f) = 0, \quad (5.8)$$

et

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \langle \mathbf{u} \rangle^s) = 0. \quad (5.9)$$

En terme de densité de particules, l'équation (5.9) se réécrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \langle \mathbf{u} \rangle^p) = 0. \quad (5.10)$$

Bien que le fluide utilisé soit incompressible, l'équation de conservation du volume pour la phase fluide (5.8) est celle d'un fluide équivalent qui est compressible. Cette compressibilité apparente de la phase fluide vient du fait que la densité locale de particule peut varier spatialement et temporellement. Ici, nous considérons un régime stationnaire et alors les termes de dérivées temporelle sont nuls. De plus, dans la géométrie considérée, on a  $\text{grad}(n) \parallel \mathbf{e}_y$  et  $\langle \mathbf{u} \rangle^{f,p,s} \parallel \mathbf{e}_x$  pour des raisons de symétrie. Dans ce cas, les équations (5.8), (5.9) et (5.10) sont réduites à :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle^f = 0, \quad (5.11)$$

et

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle^{p,s} = 0. \quad (5.12)$$

Finalement, pour l'écoulement considéré, bien que les phases apparentes soient compressibles, l'écoulement mésoscopique de chaque phase est quant à lui incompressible.

## Modèle à une phase

Pour le moment, nous avons décrit le fluide et le milieu granulaire au travers de deux phases équivalentes. On souhaite maintenant abandonner cette description à deux phases pour ne décrire plus qu'une seule phase apparente : la phase de mélange. Pour imager cette représentation du système, cela revient à parler de boue et plus d'un mélange d'eau et de particules sédimentaires (limons et argiles). On définit la vitesse apparente de cette phase équivalente  $\langle \mathbf{u} \rangle^m$  comme :

$$\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle^m = \rho_p \phi \langle \mathbf{u} \rangle^s + \rho_f \epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f, \quad (5.13)$$

où  $\bar{\rho} = \phi \rho_p + \epsilon \rho_f$  est la masse volumique locale du mélange. Il s'agit de la moyenne massique des vitesses de chaque phase. La modélisation à une phase a principalement un intérêt dans le cas où les vitesses des deux phases sont presque les mêmes ; dans les autres cas, il est souvent difficile de donner un sens à  $\langle \mathbf{u} \rangle^m$ .

Si on multiplie l'équation (5.8) par  $\rho_f$  et l'équation (5.9) par  $\rho_p$  avant de les sommer, on obtient l'équation de conservation de la masse pour la phase de mélange :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle^m) = 0. \quad (5.14)$$

La phase de mélange n'a pas une densité constante, on ne peut donc pas conclure quant à sa compressibilité dans le cas général.

On peut finalement définir une quatrième vitesse moyenne, la vitesse de mélange  $\langle \mathbf{u} \rangle$  (à ne pas confondre avec la vitesse de la phase de mélange  $\langle \mathbf{u} \rangle^m$ ). On la définit comme la moyenne volumique (et non la moyenne massique) des vitesses des phases fluide et granulaire :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \phi \langle \mathbf{u} \rangle^s + \epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f. \quad (5.15)$$

La somme des équations (5.8) et (5.9) montre que cette vitesse satisfait l'équation suivante :

$$\nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \quad (5.16)$$

La vitesse de mélange  $\langle \mathbf{u} \rangle$  est donc incompressible (dans le cas général) contrairement aux vitesses des phases fluide, granulaire et de mélange.

## 5.1.4 Conservation de la quantité de mouvement à l'échelle mésoscopique

### Modèle à deux phases

JACKSON (2000) applique la méthode de prise de moyennes présentée dans ce chapitre aux équations microscopiques (équations de Navier-Stokes (2.1) et équations de conservation de la quantité de mouvement des grains (2.3) et (2.4)) et obtient le système d'équations mésoscopiques vérifié par les grandeurs mésoscopiques. Les équations de conservation de la quantité de mouvement pour les phases équivalentes prennent la forme suivante :

$$\rho_f \epsilon \frac{D_f \langle \mathbf{u} \rangle^f}{Dt} = \nabla \cdot \Sigma^f - \phi \nabla \cdot \Sigma^f - n \langle \mathbf{f}_1 \rangle^p + \rho_f \epsilon \mathbf{g} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{d}{L} \right)^2 \right), \quad (5.17)$$

$$\rho_p \phi \frac{D_p \langle \mathbf{u} \rangle^p}{Dt} = \nabla \cdot \Sigma^p + \phi \nabla \cdot \Sigma^f + n \langle \mathbf{f}_1 \rangle^p + \rho_p \phi \mathbf{g} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{d}{L} \right)^2 \right), \quad (5.18)$$

où  $L$  est une échelle de longueur macroscopique.  $n \langle \mathbf{f} \rangle^p = n \langle \mathbf{f}_1 \rangle^p + \phi \nabla \cdot \Sigma^f$  correspond à l'interaction hydrodynamique moyenne entre les particules et le fluide, elle est la contribution de la poussée d'Archimède et du reste des interactions hydrodynamiques (forces de traînée, de portance, de masse ajoutée, de BASSET, les corrections de FAXÉN, etc...).  $\Sigma^f$  et  $\Sigma^p$  sont respectivement le tenseur apparent des contraintes dans les phases fluide et granulaire.  $\frac{D_X(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \langle \mathbf{u} \rangle^X \cdot \nabla(\cdot)$  correspond à la dérivée convective de la quantité  $(\cdot)$  transportée à la vitesse de la phase  $X$ , c'est-à-dire  $\langle \mathbf{u} \rangle^X$  (avec  $X = p, f, m$ ). Ces termes s'expriment de la façon suivante :

$$n(\mathbf{x}) \langle \mathbf{f} \rangle^p(\mathbf{x}) = \sum_p g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \int_{S_p} (\sigma \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (5.19)$$

$$\Sigma^f = \epsilon \langle \sigma \rangle^f + n \langle s^f \rangle^p - \rho_f \epsilon \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle^f, \quad (5.20)$$

$$\Sigma^p = n \langle s^s \rangle^p - \rho_p \phi \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle^p, \quad (5.21)$$

où  $\langle \sigma \rangle^f$  représente la moyenne sur la phase fluide des contraintes (microscopiques) dans le fluide (défini par l'équation (2.7)),  $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle^{f,p}$  représente les fluctuations spatiales de la vitesse  $\langle \mathbf{u} \rangle^{f,p}$  et les tenseurs  $\langle s^f \rangle^p$  et  $\langle s^s \rangle^p$  s'écrivent :

$$n \langle s^f \rangle^p(\mathbf{x}) = \frac{d}{2} \sum_p g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \int_{S_p} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} dS, \quad (5.22)$$

et

$$n\langle s^s \rangle^p(\mathbf{x}) = \frac{d}{2} \sum_p g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \sum_{q \neq p} \mathbf{f}_c^{pq} \otimes \mathbf{n}^{pq}, \quad (5.23)$$

où  $\mathbf{f}_c^{pq}$  correspond à la force exercée par la particule  $q$  sur la particule  $p$  à leur point de contact et  $\mathbf{n}^{pq} = \frac{\mathbf{x}^q - \mathbf{x}^p}{\|\mathbf{x}^q - \mathbf{x}^p\|}$  est le vecteur normal à la particule  $p$  au niveau de son point de contact avec la particule  $q$  et dirigé vers l'extérieur. On peut remarquer que les contraintes apparentes dans la phase fluide possèdent une contribution des grains au travers du tenseur  $n\langle s^f \rangle^p$ . Une dérivation détaillée des équations (5.17) et (5.18) est disponible dans JACKSON (1997, 2000).

On peut calculer le terme  $n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p$  grâce à l'équation (5.19) en utilisant la même méthode que celle décrite dans la section 2.3.1.4. Le calcul du terme  $n\langle s^s \rangle^p$  ne pose pas de problème particulier puisque la méthode de résolution de la phase granulaire calcule explicitement les forces de contact  $\mathbf{f}_c^{pq}$ . Par contre, le calcul du terme  $n\langle s^f \rangle^p$  n'est pas possible avec l'expression (5.22) car les interfaces des particules sont diffuses avec la méthode IBM; il nous est donc impossible de calculer des intégrales surfaciques. On dérive alors une autre expression de ce tenseur s'appuyant sur des intégrales volumiques au lieu d'intégrales de surface. On obtient l'expression suivante de  $n\langle s^f \rangle^p$  :

$$n\langle s^f \rangle^p(\mathbf{x}) = \frac{d}{2} \sum_p g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \int_{V_p} \left( \sigma + \rho_f \frac{d\mathbf{u}}{dt} \otimes \mathbf{r} - \rho_f \mathbf{f}_{IBM} \otimes \mathbf{r} \right) dv. \quad (5.24)$$

Une démonstration de cette relation est disponible dans l'annexe D.

Le système d'équations mésoscopiques, (5.17) et (5.18), décrit l'évolution des vitesses des phases apparentes fluide et granulaire à l'échelle mésoscopique. Les termes  $\Sigma^f$ ,  $\Sigma^p$  et  $n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p$  font intervenir des quantités microscopiques dans leur calcul et ne possèdent pas d'expression ne faisant intervenir que des grandeurs mésoscopiques. Afin que la description mésoscopique du problème soit suffisante pour résoudre cet écoulement, on doit modéliser ces trois termes et les exprimer uniquement en fonction de quantités mésoscopiques. De telles expressions sont communément appelées des relations de fermeture pour le système d'équation mésoscopique (*i.e.* elles ferment le problème mésoscopique et le rendent auto-suffisant).

Dans le cas d'un écoulement cisailé simple, on peut simplifier le système mésoscopique obtenu en utilisant les invariants et symétries du problème considéré. Le problème est invariant par translation selon  $x$  et selon  $z$  donc les différentes grandeurs ne peuvent que être fonction de la coordonnée verticale  $y$ . De plus, le système est symétrique par rapport à tous plans d'équation  $z = z_0$  (quelque soit la valeur de  $z_0$ ) donc les vitesses mésoscopiques selon  $z$  sont nulles. Finalement, on étudie uniquement le régime stationnaire et donc les dérivées temporelles sont nulles (invariance par translation dans le temps). On peut donc réécrire les équations de conservation de la quantité de mouvement ((5.17) et (5.18)) en prenant en compte ces informations. Il vient alors, en projetant les équations vectorielles (5.17) et (5.18) sur les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{phase fluide :} \\ \text{phase granulaire :} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_x \rangle^f}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y} - \phi \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_x^p, \\ \epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_y \rangle^f}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y} - \phi \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_y^p + \rho_f \epsilon g_y, \\ \langle u_z \rangle^f = 0. \\ \phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_x \rangle^p}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{xy}^p}{\partial y} + \phi \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_x^p, \\ \phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_y \rangle^p}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{yy}^p}{\partial y} + \phi \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_y^p + \rho_p \phi g_y, \\ \langle u_z \rangle^p = 0. \end{array} \right. \quad (5.25)$$

### Modèle à une phase

La forme générale de l'équation mésoscopique de conservation de la quantité de mouvement de la phase de mélange s'écrit (JACKSON (1997, 2000)) :

$$\bar{\rho} \frac{D_m \langle \mathbf{u} \rangle^m}{Dt} = \nabla \cdot \Sigma^{tot} + \bar{\rho} \mathbf{g} + \mathcal{O} \left( \left( \frac{d}{L} \right)^2 \right), \quad (5.26)$$

où  $\Sigma^{tot} = \Sigma^p + \Sigma^f$  est la contrainte apparente totale. Si on compare cette équation aux équations mésoscopiques pour chaque phase (équations (5.18) et (5.17)), on remarque que les termes correspondant à la poussée d'Archimède et aux interactions hydrodynamiques disparaissent. Ces deux termes modélisent les transferts de quantité de mouvement entre les phases équivalentes fluide et granulaire; lorsqu'on considère ces deux phases en même temps, ces forces deviennent internes au système et n'apparaissent donc plus dans le bilan de quantité de mouvement.

Trouver les relations de fermeture pour la phase de mélange consiste donc, simplement, à exprimer le tenseur  $\Sigma^{tot}$  en fonction de quantités mésoscopiques. Il n'est pas nécessaire de trouver des expressions individuelles pour  $\Sigma^f$  et  $\Sigma^p$ . Il n'est pas non plus nécessaire d'exprimer le couplage  $n \langle f \rangle^f$  entre les phases apparentes fluide et granulaire en fonction des grandeurs mésoscopiques, ce terme n'intervenant plus dans le cas de la phase de mélange.

De la même façon que pour les phases fluide et granulaire, on peut utiliser les invariants et symétries du problème afin de simplifier le système d'équations vérifié par la phase de mélange. On obtient alors après projection :

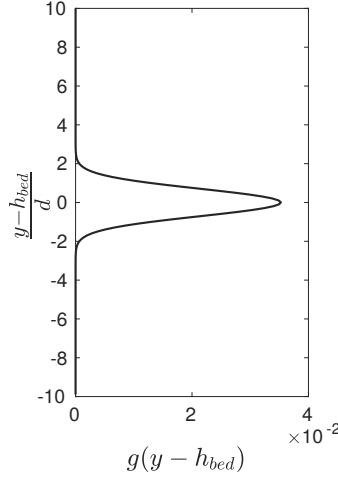
$$\text{phase de mélange :} \left\{ \begin{array}{l} \bar{\rho} \langle u_y \rangle^m \frac{\partial \langle u_x \rangle^m}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{xy}^{tot}}{\partial y}, \\ \bar{\rho} \langle u_y \rangle^m \frac{\partial \langle u_y \rangle^m}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{yy}^{tot}}{\partial y} + \bar{\rho} g, \\ \langle u_z \rangle^f = 0. \end{array} \right. \quad (5.27)$$

#### 5.1.5 Fonction de pondération & volume élémentaire représentatif

On doit maintenant se donner une fonction de pondération adaptée à notre problème afin de pouvoir calculer les moyennes volumiques définies par les équations (5.5), (5.6) et (5.7). Nous avons choisi d'utiliser la fonction poids gaussienne, centrée en  $\mathbf{x}$ , définie par :

$$g : \mathbf{x} - \mathbf{x}' \mapsto g(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \frac{1}{L_x L_z} \frac{e^{-\left(\frac{y-y'}{h_g}\right)^2}}{\int_0^{L_y} e^{-\left(\frac{y-y''}{h_g}\right)^2} dy''}, \quad (5.28)$$

où  $h_g$  est la taille caractéristique du volume de prise de moyenne ;  $y$  est la coordonnée verticale du vecteur  $\mathbf{x}$  et  $y'$  celle du vecteur  $\mathbf{x}'$ . Cette fonction de pondération est invariante dans les directions horizontales  $x$  et  $z$  et est gaussienne dans la direction verticale  $y$ . La figure 5.2 montre le profil vertical de cette fonction de pondération lorsqu'elle est centrée en  $h_{bed}$ .



**FIGURE 5.2** – Profil vertical montrant les valeurs prises par la fonction de pondération  $g$  définie par la relation (5.28). Ici,  $g$  est centrée en  $y = h_{bed}$  et  $h_g = d$ .

Par conséquent, nous sommes désormais en mesure de calculer tous les termes des équations mésoscopiques à partir de la méthode de résolution (IBM-DEM). Effectuer le changement d'échelle entre les échelles microscopique et macroscopique consiste maintenant à vérifier que ces équations sont effectivement suivies par les champs mésoscopiques et à trouver des expressions de  $\Sigma^f$ ,  $\Sigma^p$  and  $n \langle \mathbf{f} \rangle^p$  dépendant uniquement des quantités mésoscopiques (*i.e.* des relations de fermeture du système mésoscopique).

Cette fonction poids définit un volume, localisé autour d'un point, sur lequel on calcule les valeurs homogénéisées en ce point. On appelle ce volume un Volume Élémentaire Représentatif (VER) s'il remplit un certain nombre de conditions. Il doit être suffisamment petit pour obtenir une description locale (*i.e.* élémentaire) mais suffisamment grand pour que les moyennes calculées dans ce volume soient représentatives. Pour que la fonction de pondération  $g$  définisse un volume qui puisse être considéré comme élémentaire et représentatif, il doit satisfaire deux inégalités. Il faut que  $d \ll h_g$  pour obtenir des valeurs significatives des moyennes spatiales calculées mais il faut aussi satisfaire l'inégalité  $h_g \ll L$  afin d'avoir une bonne précision spatiale, où  $L$  est une échelle de longueur macroscopique. Ces inégalités forment l'*hypothèse de séparation d'échelles*. Les méthodes d'homogénéisations n'ont de sens que lorsque qu'un tel volume existe.

Le volume ainsi défini par la fonction  $g$  est diffus, contrairement au volume défini dans la méthode "simple" de prise de moyenne volumique qui utilise une fonction de pondération constante sur un certain volume et nulle en dehors de ce volume (voir la section 5.2.1.2). Le caractère diffus du VER est nécessaire à l'obtention des équations mésoscopiques car on a besoin d'effectuer des développements limités de la fonction  $g$  (à l'ordre 1 ici), elle doit donc être dérivable dans tout l'espace.

Comme on peut le voir sur la figure 5.2, si  $h_g = d$  alors  $g$  est non négligeable sur une bande de largeur  $\sim 4d$ . Ici,  $h_g$  n'est pas *très grand devant*  $d$  et c'est pour cette raison qu'on effectue également une prise de moyenne temporelle après la prise de moyenne volumique. Toutefois, comme on l'a mentionné au chapitre 3, cette démarche ne permet pas toujours de compenser les limites de notre prise de moyenne volumique, en particulier dans la partie statique du lit de grains. D'autre part, l'épaisseur caractéristique de la fonction de pondération  $h_g$  est du même ordre de grandeur que l'épaisseur de la couche de grains mobiles  $\Delta H$  (qui mesure entre 1.5 et  $4d$  pour les nombres de Shields  $\theta$  considérés ici). Si on souhaite résoudre spatialement l'écoulement dans cette couche, on considère  $L = \Delta H$  comme échelle de longueur pour l'échelle mésoscopique. On se rend alors compte que la seconde inégalité constituant l'hypothèse de changement d'échelle n'est vérifiée que dans une certaine limite (et plutôt pour les grandes valeurs de  $\theta$ , pour lesquelles  $\Delta H$  est "grande").

L'hypothèse de séparation d'échelles n'étant souvent que partiellement vérifiée dans le contexte de cette étude, en particulier au niveau de la surface du lit de grains (qui correspond à une variation du système s'effectuant sur une distance d'environ  $d$ ). Il sera donc nécessaire de systématiquement vérifier l'influence de l'épaisseur caractéristique  $h_g$  sur les résultats obtenus.

## 5.2 Description mésoscopique d'un lit de grains soumis à un écoulement cisailé

On présente maintenant l'allure des différents termes des équations mésoscopiques (équations (5.17) et (5.18)) en s'appuyant sur les résultats obtenus pour un jeu de paramètre sans dimension donné. On utilise le cas correspondant à un nombre de Reynolds particulière  $Re_p = 1$  et un nombre de Shields  $\theta = 0.67$ , pour un rapport de densité  $r = 2.5$ .

On s'intéresse d'abord aux fractions volumiques et aux vitesses moyennes des deux phases pour différentes épaisseurs caractéristique du VER  $h_g$ . On présente ensuite l'équilibre dynamique de chaque phase apparente et on en déduit finalement la rhéologie apparente de ces phases équivalentes. On considérera également la phase de mélange, prenant à la fois en compte les phases fluide et granulaire. L'influence de l'épaisseur caractéristique du volume de prise de moyenne  $h_g$  et celle des nombres sans dimensions  $Re_p$  et  $\theta$  est étudiée dans ce chapitre.

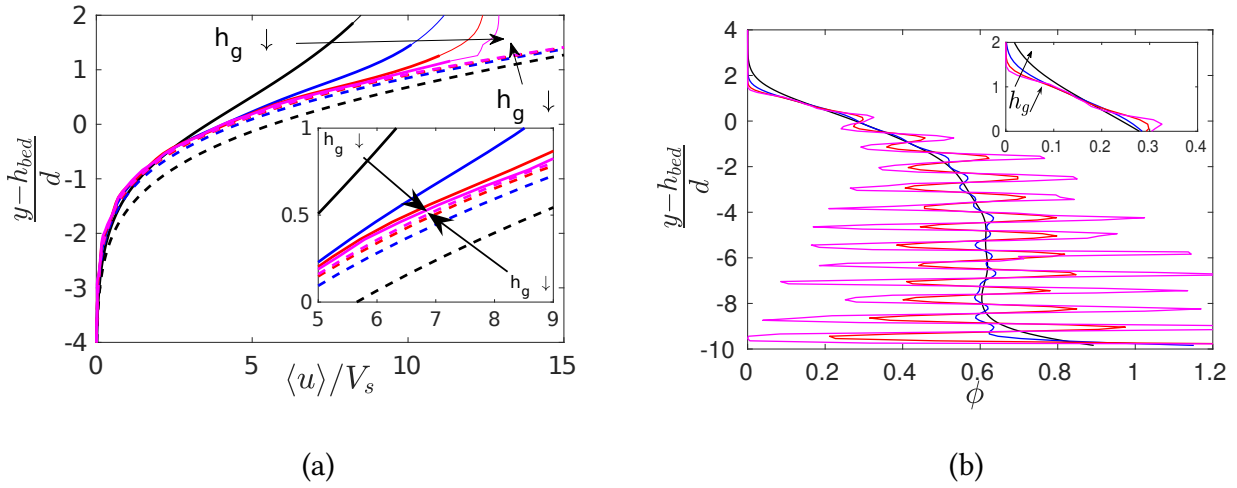
Rappelons que les champs moyens présentés ici sont issus de prises de moyenne volumique ET temporelle. Les moyennes volumiques sont calculées à un instant donné, puis moyennées temporellement. Pour des raisons de concision, nous omettons le plus souvent de parler de moyenne temporelle mais les champs moyens présentés sont tout de même systématiquement moyennés temporellement avant d'être tracés.

### 5.2.1 Cinématique des phases équivalentes

#### 5.2.1.1 Présentation des champs de vitesse moyenne

La figure 5.3 (a) présente les profils verticaux des vitesses moyennes des phases fluide et granulaire dans le sens de l'écoulement (direction  $x$ ) obtenus après le processus d'homogénéisation décrit précédemment. On trace également le profil de fraction volumique solide  $\phi$  sur la figure 5.3 (b). Ces profils sont tracés pour quatre valeurs de l'épaisseur caractéristique de la fonction poids,  $h_g = d/10$ ,  $d/4$ ,  $d/2$  et  $d$ .





**FIGURE 5.3** – (a) : Profils verticaux des vitesses moyennes des phases fluide (pointillés) et granulaire (traits pleins), (noir –) pour  $h_g/d = 1$ ; (bleu –) pour  $h_g/d = 1/2$ ; (rouge –) pour  $h_g/d = 1/4$ ; (magenta –) pour  $h_g/d = 1/10$ . (b) : Profil vertical de fraction volumique solide  $\phi$  pour les mêmes valeurs de  $h_g$  et avec le même code couleur. La vitesse de la phase granulaire est tracé en trait épais pour  $\phi \leq 0.025$  et en trait fin sinon.

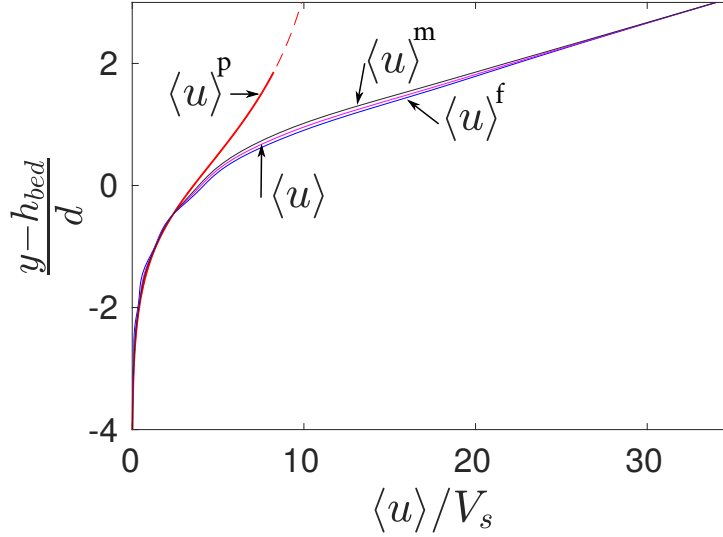
Avant de s'intéresser à l'influence de  $h_g$ , on peut déjà constater sur la figure 5.3 (a) que les champs de vitesse moyens des phases fluide et granulaire ont globalement la même allure que précédemment. Au-dessus du lit de grains, la vitesse de la phase fluide est un cisaillement simple (non visible ici). Dans cette zone, la vitesse granulaire est définie et prend une valeur non nulle, mais cette valeur n'a pas de sens physique puisqu'il n'y a pas de grains ici ( $\phi = 0$ ). La vitesse limite atteinte par la phase granulaire est la vitesse maximale des grains au sommet du lit de grains. On définit alors arbitrairement le haut du lit de grains comme la hauteur à laquelle  $\phi = 0.025$  (valeur de 2.5% proposée par DERKSEN (2011)). Dans la couche de grains mobiles, la vitesse des deux phases décroît rapidement pour atteindre 2% de la vitesse de Stokes en  $H_b$ . Pour finir, les vitesses des deux phases sont négligeables dans la zone statique du lit de grains.

On considère maintenant l'influence de l'épaisseur caractéristique  $h_g$  sur les champs de vitesse et de fraction volumique obtenus. Commençons par la fraction volumique de grain  $\phi$ . On voit sur la figure 5.3 (b) que plus  $h_g$  est petit, plus l'amplitude des oscillations de  $\phi$  dans la zone statique est grande. Ces fluctuations sont pratiquement imperceptibles pour  $h_g = d$  et elles atteignent environ deux tiers de la valeur moyenne de  $\phi$  pour  $h_g = d/10$ . On voit aussi que la distance nécessaire à  $\phi$  pour s'annuler au-dessus du lit de grains augmente avec l'épaisseur du VER  $h_g$ . Plus  $h_g$  augmente, plus les courbes sont lissées, et donc moins les gradients sont importants. On s'intéresse à nouveau aux profils de vitesses des phases fluide et granulaire, tracés sur la figure 5.3. Ils convergent l'un vers l'autre quand  $h_g$  diminue. La vitesse de glissement à l'échelle mésoscopique,  $\langle u \rangle^f - \langle u \rangle^p$ , dépend donc fortement du choix de l'épaisseur  $h_g$ . On peut remarquer que la hauteur du lit de grains dépend également légèrement de la valeur de  $h_g$ . Il en est de même pour la position  $H_b$  du bas de la couche de grains mobiles qui varie avec  $h_g$ . Elle vaut  $H_b - h_{bed} = -5.45d, -5.0d, -4.8d$  et  $-4.8d$ , pour  $h_g/d = 1, 1/2, 1/4$  et  $1/10$  respectivement.

Comme mentionné à la fin de la section 5.1, on veut  $h_g \ll L$  pour des raisons de résolution spatiale. On voit ici que plus cette inégalité est vérifiée, plus les profils de vitesse obtenus sont résolus mais plus la compacité locale  $\phi$  devient fluctuante. Bien que la figure 5.3 (a) suggère de préférer l'utilisation de la valeur la plus faible possible de  $h_g$ , on présentera les résultats suivant en prenant  $h_g = d$ . Ce choix est fait pour des raisons de clarté des figures présentées, de plus, nous avons besoin de satisfaire l'inégalité  $h_g \gg d$  pour que les équations mésoscopiques soient valides. On peut également noter que pour  $h_g \leq d/4$ , les champs de vitesse fluide et granulaire commencent à osciller. Ce phénomène est dû à la présence des couches de grains mentionnées dans la section 4.3.3.1.

Les vitesses moyennes dans les directions  $y$  et  $z$  devraient être nulles pour des raisons de symétries mais l'accumulation des erreurs numériques et de prise de moyenne fait qu'elles atteignent des valeurs maximales de l'ordre de  $5 \times 10^{-2} V_s$  dans la couche mobile pour  $h_g = d$ .

La figure 5.4 présente le profil de vitesse de la phase de mélange  $\langle u \rangle^m$ , ainsi que celui de la vitesse de mélange  $\langle u \rangle$  pour  $h_g = d$ . Les vitesses moyennes des deux phases apparentes fluide et granulaire sont également tracées pour la même valeur de  $h_g$ .



**FIGURE 5.4** – Profils verticaux des vitesses (rouge -) : granulaire  $\langle u \rangle^p$ , (bleu -) : fluide  $\langle u \rangle^f$ , (magenta -) : de mélange  $\langle u \rangle$  et (noir -) : de la phase de mélange  $\langle u \rangle^m$  pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ,  $r = 1$  et  $h_g = d$ .

On voit sur la figure 5.4 que les vitesses de la phase fluide  $\langle u \rangle^f$ , de la phase de mélange  $\langle u \rangle^m$  et la vitesse de mélange  $\langle u \rangle$  sont presque égales ; c'est le comportement attendu pour les faibles nombres de Reynolds particulaire. Au-dessus du lit de grains, elles tendent rapidement vers un cisaillement simple et l'écart entre elles tend vers 0. Dans la couche mobile, ces trois vitesses vérifient la relation  $\langle u \rangle^m \leq \langle u \rangle \leq \langle u \rangle^f$  et elles tendent toutes rapidement vers 0 dans la zone statique du lit de grains. Finalement, l'emploi de l'une ou l'autre des vitesses mésoscopiques (à l'exception de la vitesse granulaire) n'aura sans doute que peu d'influence sur les résultats obtenus.

### 5.2.1.2 Comparaison avec une autre méthode de prise de moyenne

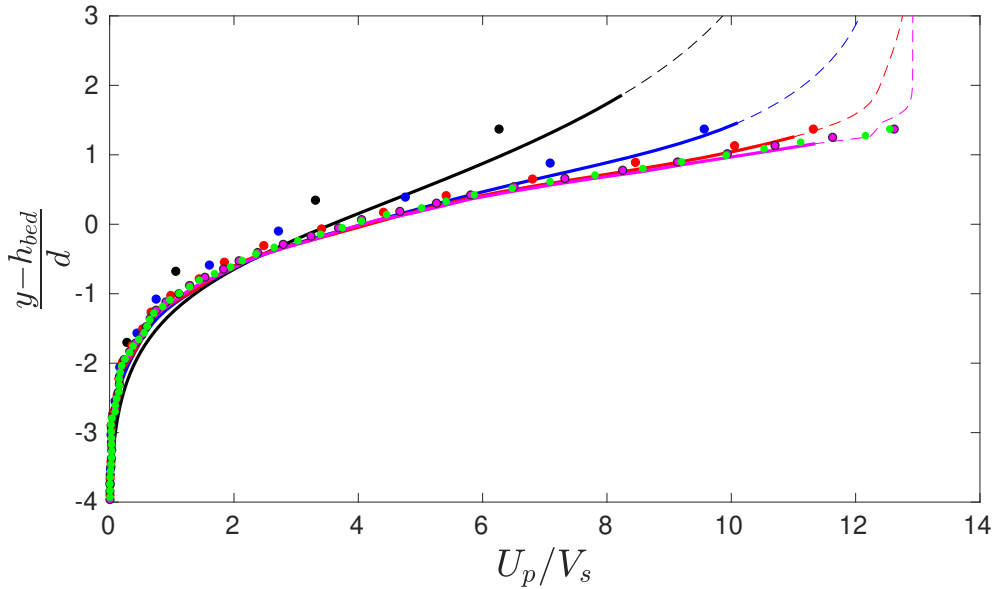
Dans cette section, on compare les profils moyens de vitesse des grains obtenus via la méthode d'homogénéisation développée par JACKSON (1997, 2000) avec ceux obtenus par une méthode de prise de moyenne appelée "simple".

La méthode de changement d'échelle de JACKSON (2000) a été décrite dans la section 5.1. La méthode "simple" consiste à découper le domaine en sous-domaines de taille et de position fixées. On effectue ensuite la moyenne volumique, sur le volume des sous-domaines, de la quantité considérée (la vitesse dans le sens de l'écoulement ici) et on en déduit la valeur moyenne de cette quantité à la position moyenne du sous-domaine considéré. On obtient alors une description discrète (un point par sous-domaine) des champs moyens. Cela correspond à peu près à choisir une fonction de pondération constante sur un sous-domaine et nulle ailleurs dans la méthode de JACKSON (2000).

Dans le cadre de cette étude, les sous-domaines considérés s'étendent horizontalement sur l'ensemble du domaine. On note  $N_{cg}$  le nombre de sous-domaine considérés. On note  $h_i$  (pour  $i \in$

$[0, N_{cg})$  les hauteurs séparant les sous-domaines et on note  $Y_i$  (pour  $i \in [1, N_{cg})$ ) les positions moyennes des sous-domaines. Afin que le dernier point,  $Y_{N_{cg}}$ , corresponde au sommet du lit de grains quelque soit  $N_{cg}$ , on pose  $h_0 = 0$  et  $h_{N_{cg}} = Y_{max} + \Delta_h/2$ , où  $Y_{max}$  est la hauteur la plus haute atteinte par un grain au court de la simulation et où  $\Delta_h = \frac{h_{N_{cg}} - h_0}{N_{cg} - 1/2}$  est l'épaisseur des sous-domaines. Ainsi, on a bien,  $Y_{N_{cg}} = h_{N_{cg}} - \Delta_h/2 = Y_{max}$ .

La figure 5.5 présente les profils de vitesse des grains dans le sens de l'écoulement pour les deux méthodes mentionnées ci-dessus et pour différentes tailles des sous-domaines (pour la méthode "simple") et de longueur caractéristiques  $h_g$  de la fonction de pondération  $g$ . On trace les profils pour  $N_{cg} = 12, 24, 48, 96$  et  $120$ ; sachant que le lit de grains a une épaisseur de  $11.3d$  environ, cela correspond à des épaisseurs des sous-domaines de  $\Delta_h/d = 0.98, 0.48d, 0.24d, 0.12d$  et  $0.09d$ . On considère les valeurs suivantes pour l'épaisseur caractéristique du VER  $h_g/d = 1/10, 1/4, 1/2$  et  $1$ .  $h_g = d/10$  correspond à la valeur minimale de  $h_g$  que l'on peut tester ici car c'est la valeur du pas du maillage,  $\Delta x = d/10$ . Les résultats présentés correspondent au cas pour lequel  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ .



**FIGURE 5.5** – Profils verticaux de vitesse moyenne des grains, via la méthode d'homogénéisation de JACKSON (2000) (en traits plein pour  $\phi \geq 0.025$  et en pointillés sinon) et via la méthode "simple" (symboles ●) pour différentes épaisseurs caractéristiques des VER. (- ●) :  $h_g/d = 1$ ,  $\Delta_h/d = 0.98$ ; (- ●) :  $h_g/d = 1/2$ ,  $\Delta_h/d = 0.48$ ; (- ●) :  $h_g/d = 1/4$ ,  $\Delta_h/d = 0.24$ ; (- ●) :  $h_g/d = 1/10$ ,  $\Delta_h/d = 0.12$ ; (●) :  $\Delta_h/d = 0.09$ .

On peut voir sur la figure 5.5 que les deux méthodes semblent converger lorsque l'épaisseur caractéristique sur VER utilisé tend vers 0. De plus, elles semblent converger vers le même profil moyen de vitesse des grains. On remarque également que les résultats obtenus pour  $\Delta_h \simeq d$  sont proches de ceux pour  $h_g = d$ , de même pour  $\Delta_h \simeq d/2$  et  $h_g = d/2$ ,  $\Delta_h \simeq d/4$  et  $h_g = d/4$  et pour  $\Delta_h \simeq d/10$  et  $h_g = d/10$ . Les deux méthodes de changement d'échelle semblent donc équivalentes ici.

On peut tout de même noter une différence entre ces deux méthodes : la hauteur du lit de grains  $H_m$ . Pour la méthode "simple", le point le plus haut correspond à la position la plus élevée atteinte par un grain durant la simulation; cette hauteur est indépendante de la taille des sous-domaines de prise de moyenne. Pour la méthode d'homogénéisation de JACKSON (2000), on a défini la position du haut du lit de grains comme étant la position à laquelle  $\phi = 0.025$ . Or  $\phi$  dépend de  $h_g$ , et donc la position du haut du lit de grains en dépend aussi. Ici, le sommet du lit est situé entre

$H_m - h_{bed} = 1.86d$  pour  $h_g = d$  et  $H_m - h_{bed} = 1.16d$  pour  $h_g = d/10$ ; pour la méthode "simple" on trouve  $H_m - h_{bed} = 1.37d$ . Le position du bas de la couche mobile, définie comme la position à laquelle la vitesse granulaire vaut 2% de la vitesse de Stokes (un autre seuil de vitesse mène à la même conclusion), dépend également de l'épaisseur des VER considérés.

Une autre différence importante est à souligner. La méthode d'homogénéisation ne donne pas seulement accès aux vitesses moyennes des phases équivalentes mais elle fournit aussi le système d'équations mésoscopiques vérifié par les quantités mésoscopiques.

Nous sommes confrontés à la limite de la méthode de changement d'échelle. On doit en effet vérifier l'hypothèse de séparation d'échelles mais on souhaite mesurer des variations inférieures à la taille des grains. Il n'existe pas de solution parfaite, il s'agit de faire des compromis adaptés à l'usage que l'on souhaite faire des champs mésoscopiques, voire macroscopiques.

### 5.2.2 Bilan de quantité de mouvement de la phase fluide

On étudie maintenant l'équilibre dynamique de la phase fluide. Les termes de l'équation mésoscopique (5.17) sont présentés et quantifiés grâce aux simulations IBM-DEM. On s'intéresse dans un premier temps à l'équilibre des forces dans la direction verticale puis à celui dans le sens de l'écoulement.

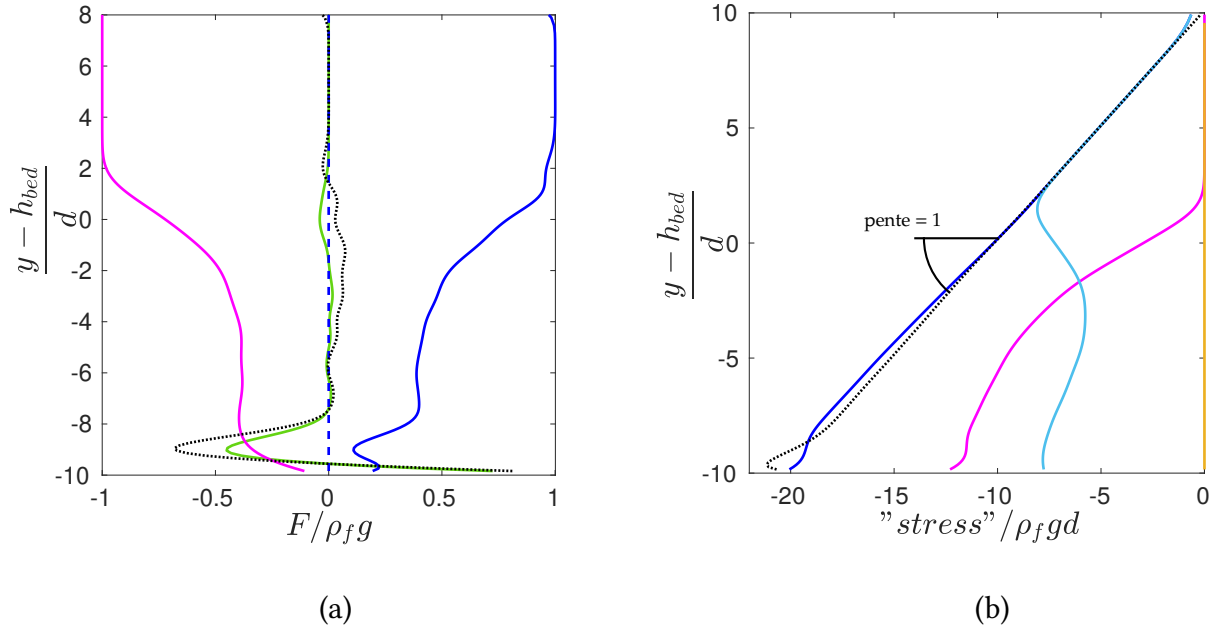
#### Équilibre vertical

On rappelle l'équation décrivant l'équilibre vertical des forces pour la phase fluide dans le régime stationnaire :

$$\epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_y \rangle^f}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_y^p + \rho_f \epsilon g_y. \quad (5.29)$$

Le membre de gauche de l'équation (5.29) correspond au terme inertiel et dans le membre de droite on retrouve la divergence du tenseur des contraintes apparentes normales (*i.e.* qui correspond plus ou moins au gradient de pression apparente dans le fluide) qui est pondéré par  $\epsilon = 1 - \phi$  pour prendre en compte la poussée d'Archimède; la moyenne des interactions entre le fluide et grains qui correspond principalement à la force de portance des grains (avec un signe moins car on considère la phase fluide ici) et finalement le poids de la phase équivalente fluide.

La figure 5.6 (a) présente les profils verticaux des termes de l'équation (5.29). La figure 5.6 (b) montre le profil vertical de la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^f$  dans la phase fluide, ainsi que les différentes contributions à cette dernière (voir l'équation (5.20)). On a également tracé l'intégrale de la somme de tous les autres termes de l'équation (5.29) (entre le haut du domaine et  $y$ ) afin de la comparer à la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^f$ ; cela permet d'estimer l'erreur cumulée sur l'ensemble du domaine.



**FIGURE 5.6** – (a) : Forces moyennes appliquées à la phase équivalente fluide dans la direction verticale. (magenta –) : poids de la phase fluide; (bleu –) : divergence de la contrainte normale apparente dans la phase fluide (multipliée par  $\epsilon$  pour prendre en compte la poussée d'Archimède); (bleu - -) : terme inertiel; (vert - -) : portance des grains (avec un signe -). (noir  $\cdots$ ) : erreur (somme de tous les termes de l'équation (5.29)). (b) : (bleu –) : contrainte normale apparente dans la phase fluide  $\Sigma_{yy}^f$  et ses trois contributions (cyan –) :  $\epsilon \langle \sigma_{yy} \rangle^f$ , (magenta –) :  $n \langle s_{yy}^f \rangle^p$  et (jaune –) :  $-\rho_f \epsilon \langle v'^2 \rangle^f$ . L'intégrale  $\int \frac{1}{\epsilon} (\epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_y \rangle^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_y^p - \rho_f \epsilon g_y) dy'$  est aussi représentée avec des ( $\cdots$ ) noirs et d'après l'équation (5.29), cette intégrale devrait être égale à  $\Sigma_{yy}^f$ . L'écart entre ces deux courbes représente donc l'erreur de prise de moyenne.

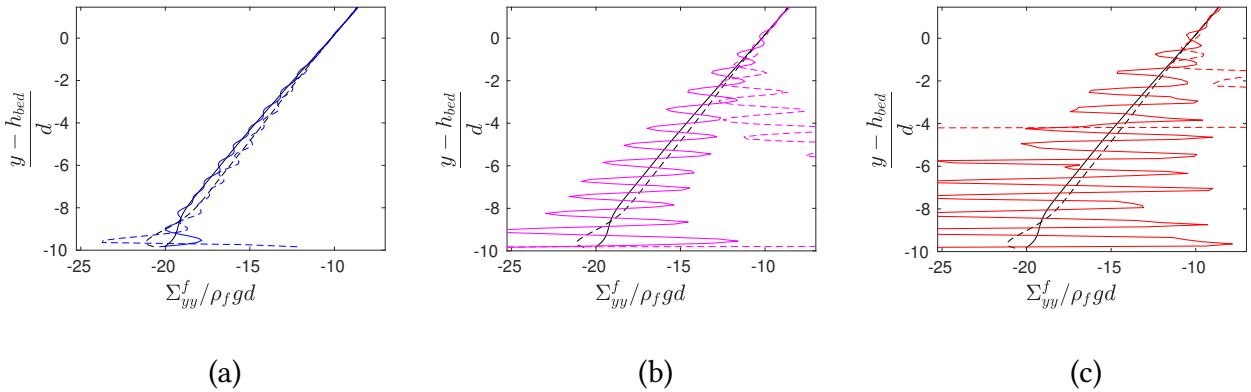
La figure 5.6 (a) montre que le terme inertiel est négligeable dans tout le domaine considéré (pour ce jeu de paramètres sans dimensions en tous cas). Ensuite, on voit que le poids est compensé par la divergence des contraintes normales (multipliée par  $\epsilon$ ). La force de portance moyenne est aussi négligeable ici, même si elle prend des valeurs non nulles au niveau de la couche de grains mobiles. Cette force ne peut pas être nulle puisqu'on observe une décompaction de la couche supérieure du lit de grains lorsqu'il est mis en mouvement. La valeur maximale observée ici est de  $0.04 \rho_f \gamma^2 d$  (ce qui représente environ 20% de la force de traînée maximale comme nous le verrons dans la section 5.2.3). On ne peut toutefois pas conclure quant à la pertinence de cette observation car elle est du même ordre que l'erreur commise ici. Afin d'estimer cette erreur, on a tracé la somme de tous les termes de l'équation (5.29); cette somme est donc censée être nulle. Dans les faits, nous ne satisfaisons pas très bien l'hypothèse de séparation d'échelle et il est donc normal que les équations mésoscopiques ne soient pas exactement satisfaites. On constate alors que les erreurs commises le sont principalement dans la couche de grains mobile.

La figure 5.6 (b) montre une contrainte normale augmentant à peu près linéairement lorsque l'on s'enfonce dans le lit granulaire. Le comportement de la contrainte normale apparente dans la phase fluide  $\Sigma_{yy}^f$  est donc le même que celui qu'on attendrait de la pression dans un fluide. L'équation (5.20) donne les trois contributions de la contrainte apparente dans la phase fluide. La première,  $\epsilon \langle \sigma \rangle^f$ , est la pression qu'il y a dans le fluide, la seconde,  $n \langle s^f \rangle^p$ , correspond à la contribution des grains (au travers de la répartition des contraintes à leur surface) à la contrainte apparente dans la phase fluide. La dernière contribution,  $\rho_f \epsilon \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle^f$ , correspond à un tenseur de Reynolds et est lié aux fluctuations spatiales de vitesse du fluide. Ces variations spatiales sont dues à la présence des grains, la vitesse de la phase fluide n'est donc pas égale à sa valeur moyenne partout et à tout

instant. On remarque que ce terme est négligeable (au moins pour les valeurs des paramètres sans dimensions utilisés ici). La contribution du fluide,  $\epsilon \langle \sigma \rangle^f$ , est la seule qui soit non nulle dans le fluide surplombant le lit de grains. Si on considère la partie statique du lit, on voit que la contribution des grains  $n \langle s^f \rangle^p$  représente environ 2/3 de la contrainte normale apparente, le dernier tiers étant assuré par la phase fluide (ce nombre de 2/3 correspond en fait à  $\phi \simeq 0.6$  et le "tiers" provenant de la phase fluide correspond alors à  $\epsilon = 1 - \phi \simeq 0.4$ ). Dans la couche mobile, ces deux contributions passent continûment d'une de ces limites à l'autre.

Si on calcule l'intégrale de tous les termes de l'équation (5.29), préalablement divisée par  $\epsilon$ , on obtient alors d'une part la contrainte  $\Sigma_{yy}^f$  et d'autre par l'intégrale  $\int \frac{1}{\epsilon} (\langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_y \rangle^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_y^p - \rho_f \epsilon g_y) dy$ ; on trace cette intégrale sur la figure 5.6 (b). Ces deux quantités sont censées être égales, mais comme on peut le voir sur la figure 5.6 (b), ce n'est pas tout à fait le cas. En partant du haut du domaine et en descendant progressivement dans le lit de grains, on constate que l'erreur est nulle jusqu'à la couche de grains mobiles où elle augmente progressivement. Elle devient ensuite presque constante dans la partie statique du lit de grains. L'erreur atteint 3.6% au maximum (en omettant la zone des rugosités collées au fond du lit, où des effets de bords se font sentir lors du calcul des valeurs moyennes). Cette erreur diminue lorsqu'on raffine davantage le maillage ou qu'on augmente la taille (horizontale) du domaine; ce résultat est présenté dans l'annexe F.

On a présenté les résultats pour  $h_g = d$ , mais on souhaite avoir une description la plus précise possible de l'écoulement, on souhaite donc utiliser la plus petite valeur possible de  $h_g$ . On a vu dans la section 5.2 que les profils de vitesses convergeaient pour  $h_g \leq d/4$ . La figure 5.7 présente la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^f$  obtenues pour les différentes valeurs de  $h_g$  considérées.



**FIGURE 5.7** – Contrainte normale apparente dans la phase fluide  $\Sigma_{yy}^f$  pour (a) :  $h_g = d/2$ ; (b) :  $h_g = d/4$ ; (c) :  $h_g = d/10$ . L'intégrale  $\int \frac{1}{\epsilon} (\epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_y \rangle^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_y^p - \rho_f \epsilon g_y) dy'$  est aussi représentée en pointillés. Pour chaque graphe, le cas de référence pour  $h_g = d$  est aussi tracé en noir.

La figure 5.7 montre que la contrainte normale apparente dans la phase fluide oscille dans le lit de grains, et ce d'autant plus que l'épaisseur  $h_g$  est faible. Pour  $h_g = d/2$ , l'erreur commise reste du même ordre de grandeur que pour  $h_g = d$  mais pour les valeurs plus faibles, elle augmente fortement et devient du même ordre de grandeur que la contrainte mesurée.

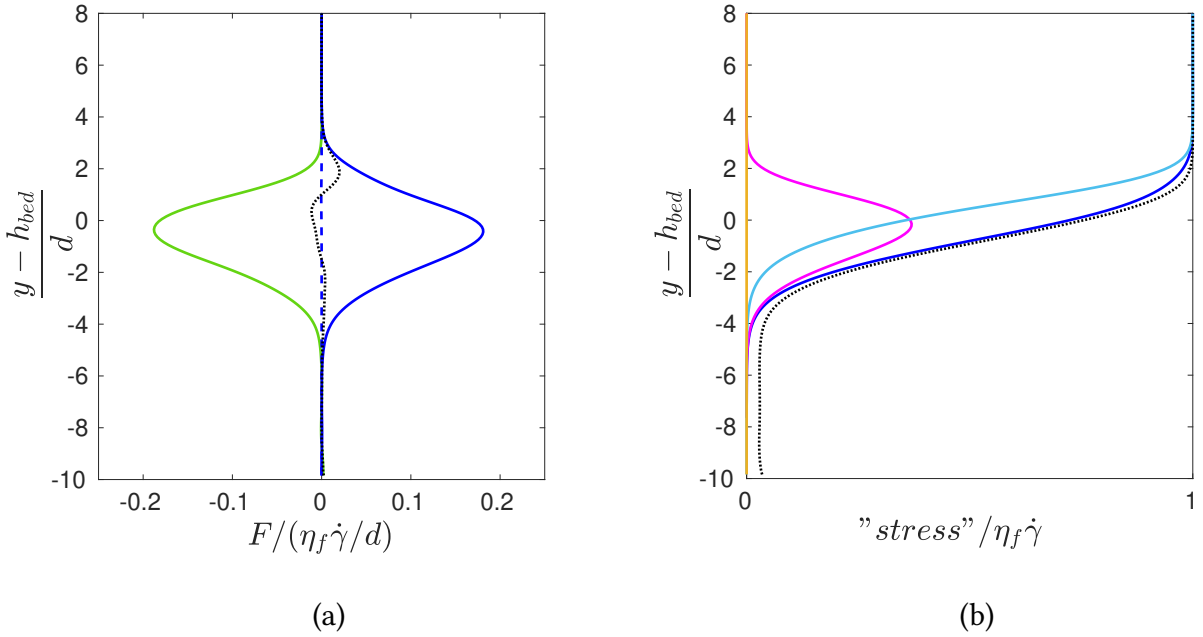
L'équation (5.29) a été obtenue sous l'hypothèse  $d \ll h_g$ . Pour  $h_g \leq d/4$  on ne vérifie plus cette hypothèse et le terme  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{d}{L}\right)^2\right)$  n'est alors plus négligeable (ce terme a été omis dans l'équation (5.29), il apparaît dans l'équation (5.17)). Nous devons donc faire un compromis entre la résolution spatiale et la possibilité d'homogénéiser le problème via la méthode présentée ici, en maintenant les erreurs à un niveau raisonnable.

## Équilibre dans le sens de l'écoulement

L'équation de conservation de la quantité de mouvement de la phase fluide (5.17) dans la direction  $x$  s'écrit :

$$\epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_x \rangle^f}{\partial y} = \epsilon \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_x^p. \quad (5.30)$$

Les trois termes de l'équation (5.30) sont tracés sur la figure 5.8 (a). On trace le profil de la contrainte de cisaillement apparente dans la phase fluide sur la figure 5.6 (b) et on y fait aussi apparaître les différentes contributions de contrainte de cisaillement (équation (5.20)).



**FIGURE 5.8** – (a) : Forces moyennes appliquées à la phase équivalente fluide dans le sens de l'écoulement. (vert –) : trainée des grains (avec un signe -); (bleu –) : divergence de la contrainte de cisaillement apparente (multipliée par  $\epsilon$  pour prendre en compte la poussée d'Archimède généralisée); (bleu - -) : terme inertiel; (noir  $\cdots$ ) : erreur (somme de tous les termes de l'équation (5.30)). (b) : (bleu –) : contrainte de cisaillement apparente dans la phase fluide  $\Sigma_{xy}^f$  et ses trois contributions (cyan –) :  $\epsilon \langle \sigma_{xy} \rangle^f$ , (magenta –) :  $n \langle s_{xy}^f \rangle^p$  et (jaune –) :  $-\rho_f \epsilon \langle u' v' \rangle^f$ . L'intégrale  $\int \frac{1}{\epsilon} (\epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_x \rangle^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_x^p) dy'$  est aussi représentée avec des ( $\cdots$ ) noirs et d'après l'équation (5.30), cette intégrale devrait être égale à  $\Sigma_{xy}^f$ . L'écart entre ces deux courbes représente donc l'erreur de la méthode de changement d'échelle.

La figure 5.8 (a) montre que, dans le sens de l'écoulement aussi, le terme inertiel est négligeable. La conservation de la quantité de mouvement de la phase fluide se résume alors à un équilibre entre la trainée moyenne de la phase granulaire, la divergence des contraintes de cisaillement et le terme de flottabilité; ces différentes contributions sont nulles en dehors de la couche mobile de grains. On a aussi tracé la somme de tous les termes de l'équation (5.30) afin d'estimer l'erreur de la méthode de prise de moyenne volumique; elle est négligeable presque partout à l'exception de la partie supérieure de la couche de grains mobile.

Sur la figure 5.8 (b), on peut voir que la contrainte apparente de cisaillement dans la phase fluide est constante et maximale dans le fluide pur puis diminue dans la couche de grains mobiles jusqu'à s'annuler en atteignant la zone statique du lit. La contribution des grains  $n \langle s^f \rangle^p$  est non nulle dans la couche de grains mobiles, ce qui fait pénétrer plus profondément dans le lit de grains la contrainte de cisaillement apparente. La contribution du tenseur de Reynolds est encore négligeable ici. On a



intégré l'équation (5.30) et tracé la somme des contributions autres que la contrainte de cisaillement sur la figure 5.8 (b). Cette intégrale devrait être égale à la contrainte de cisaillement si l'équation (5.30) était parfaitement vérifiée. Comme mentionné précédemment, ici nous ne vérifions pas vraiment l'hypothèse de séparation d'échelle, ce qui explique les erreurs observées. On mesure alors l'erreur cumulée depuis le haut du domaine via l'écart entre cette intégrale et la contrainte de cisaillement apparente. Pour ce cas là, l'erreur atteint environ 3.4% de la valeur maximale de la contrainte de cisaillement.

Ici aussi, l'erreur commise dépend légèrement de la taille du domaine et du raffinement du maillage utilisé. Ce résultat est présenté dans l'annexe F.

L'étude de la dépendance des résultats avec  $h_g$  aboutie aux mêmes constatations que pour la direction  $y$ . Cette étude est présentée dans l'annexe G.

### 5.2.3 Bilan de quantité de mouvement de la phase granulaire

On se penche désormais sur l'équilibre dynamique de la phase apparente granulaire. On présente d'abord les résultats correspondant à l'équilibre vertical puis ceux pour l'équilibre dans le sens de l'écoulement en s'appuyant sur l'équation mésoscopique (5.18). On se penche ensuite sur le tenseur des contraintes apparentes dans cette phase.

#### Équilibre vertical

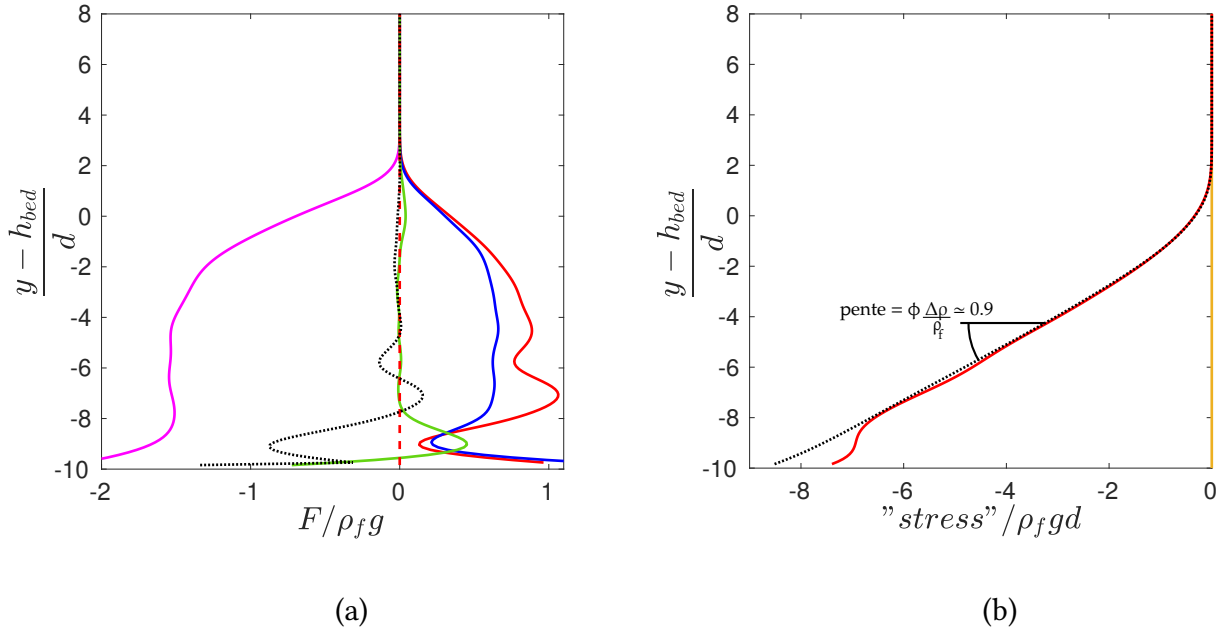
On considère maintenant l'équilibre dynamique dans la direction verticale pour la phase granulaire. L'équation mésoscopique le décrivant en régime permanent est la suivante :

$$\phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_y \rangle^p}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{yy}^p}{\partial y} + \phi \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_y^p + \rho_p \phi g_y. \quad (5.31)$$

Le membre de gauche de l'équation (5.31) correspond au terme inertiel et dans le membre de droite, on retrouve la divergence du tenseur des contraintes normales apparentes dans la phase granulaire (*i.e.* qui correspond à peu près au gradient de la pression apparente dans la phase granulaire), la flottabilité (*i.e.* la poussée d'Archimède), la moyenne des autres interactions entre le fluide et les grains, qui ici correspond principalement à la force de portance moyenne s'appliquant sur les grains, et finalement le poids de la phase granulaire.

La figure 5.9 (a) présente les profils verticaux des termes de l'équation (5.31) et la figure 5.9 (b) présente le profil de contrainte normale apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{yy}^p$ . Comme pour la phase fluide, on trace aussi la somme des termes de l'équation (5.31) sur la figure 5.9 (a) afin d'estimer l'erreur locale de la méthode de changement d'échelle. La contrainte apparente dans la phase granulaire possède deux contributions (équation (5.21)) et comme pour la phase fluide, celle du tenseur de Reynolds est négligeable ici. On trace, sur la figure 5.9 (b), l'intégrale de la somme de tous les termes de l'équation (5.31) sauf la divergence de la contrainte normale granulaire. D'après cette même équation cette intégrale devraient être égale à la contrainte normale apparente dans la phase granulaire. L'écart entre la contrainte  $\Sigma_{yy}^p$  et cette intégrale permet donc d'estimer l'erreur commise lors de la prise de moyenne spatiale.





**FIGURE 5.9** – (a) : Forces moyennes appliquées à la phase équivalente granulaire dans la direction verticale. (magenta –) : poids de la phase granulaire; (bleu –) : poussée d’Archimède généralisée (flottabilité); (rouge –) : divergence de la contrainte normale apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{yy}^p$ ; (vert –) : portance moyenne des grains; (rouge - -) : terme inertiel. (noir  $\cdots$ ) : erreur (somme de tous les termes de l’équation (5.30)). (b) : (rouge –) : contrainte normale apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{yy}^p$ ; (jaune –) : contribution du tenseur de Reynolds à la contrainte  $\Sigma_{yy}^p$ . L’intégrale  $\int (\phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_y \rangle^p}{\partial y} - \phi \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_y^p - \rho_p \phi g_y) dy'$  est aussi représentée avec des ( $\cdots$ ) noirs et d’après l’équation (5.31), cette intégrale devrait être égale à  $\Sigma_{yy}^p$ . L’écart entre ces deux courbes représente donc l’erreur de la méthode de changement d’échelle.

La figure 5.9 (a) montre que le poids apparent de la phase granulaire est compensé par le "gradient de pression granulaire" (i.e. la divergence de la contrainte normale apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{yy}^p$ ). Les termes inertiel et de portance restent ici aussi négligeables et de l’ordre de grandeur de l’erreur locale. Le terme de portance est le même que pour la phase fluide, au signe près. L’erreur locale, estimée via la somme de tous les termes de l’équation (5.31) reste négligeable presque partout à l’exception de la couche de grains mobiles où elle atteint un maximum local d’environ  $10^{-1} \rho_f g$ . L’erreur est également non négligeable au fond du lit de grains, dans la zone qui reste statique durant toute la simulation; dans cette zone, elle atteint environ  $0.2 \rho_f g$ . Cette augmentation de l’erreur au fond du lit vient du fait qu’on moyenne temporellement une situation qui est statique. Dans ce cas, la prise de moyenne temporelle ne peut donc pas compenser la taille limitée du volume de prise de moyenne.

Sur la figure 5.9 (b), on constate que la phase granulaire est à l’équilibre hydrostatique. L’erreur cumulée ne dépasse pas 3.5% ici (en ne prenant pas en compte la zone d’influence des particules fixées au fond du domaine et servant de rugosités).

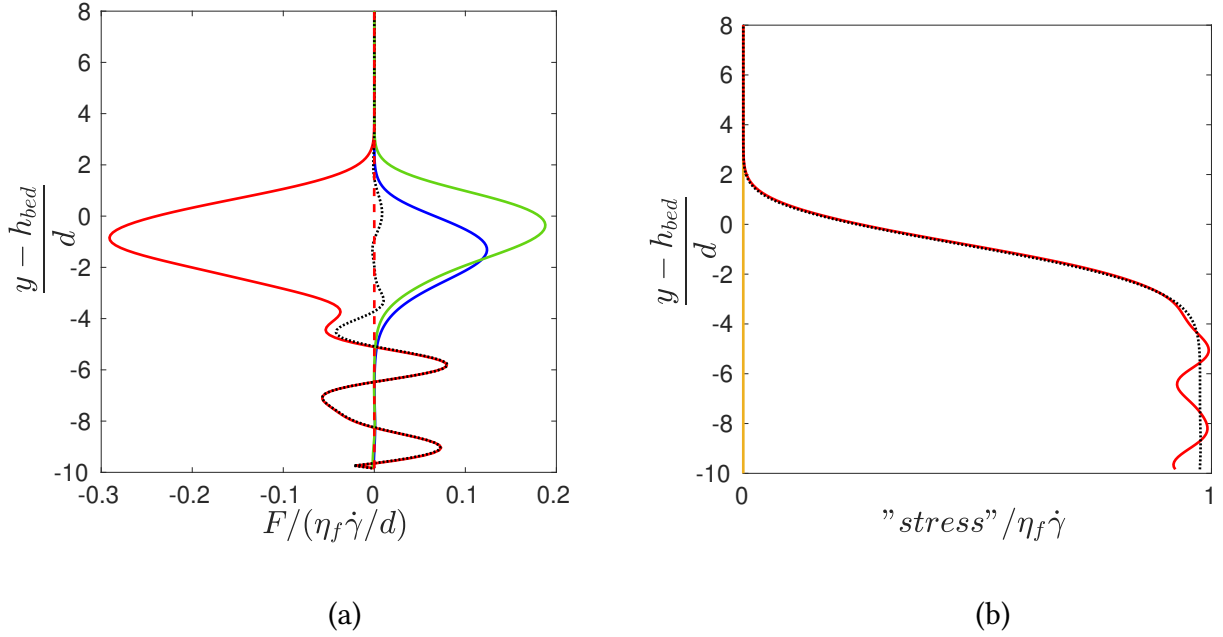
Pour cette phase également, l’erreur commise dépend de la taille du domaine de simulation ainsi que du raffinement du maillage utilisé comme nous le montrons dans l’annexe F.

L’étude de la dépendance des résultats avec  $h_g$  aboutie aux mêmes constatations que pour la phase fluide. Cette étude est présentée dans l’annexe G.

## Équilibre dans le sens de l’écoulement

Ici, on considère l’équilibre de la phase granulaire dans le sens de l’écoulement. L’équation mésoscopique décrivant cet équilibre est la suivante :

$$\phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_x \rangle^p}{\partial y} = \frac{\partial \Sigma_{xy}^p}{\partial y} + \phi \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_x^p. \quad (5.32)$$



**FIGURE 5.10** – (a) : Forces moyennes appliquées à la phase équivalente granulaire dans le sens de l'écoulement. (vert –) : traînée moyenne des grains; (bleu –) : poussée d'Archimède généralisée; (rouge –) : divergence de la contrainte de cisaillement apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{xy}^p$ ; (rouge - -) : terme inertiel. (noir  $\cdots$ ) : erreur (somme de tous les termes de l'équation (5.30)).  
(b) : (rouge –) : contrainte de cisaillement apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{xy}^p$ ; (jaune –) : contribution du tenseur de Reynolds à la contrainte  $\Sigma_{xy}^p$ . L'intégrale  $\int (\phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_x \rangle^p}{\partial y} - \phi \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_x^p) dy'$  est aussi représentée avec des ( $\cdots$ ) noirs et d'après l'équation (5.31), cette intégrale devrait être égale à  $\Sigma_{xy}^p$ . L'écart entre ces deux courbes représente donc l'erreur de la méthode de changement d'échelle.

La figure 5.10 (a) présente les forces appliquées à la phase granulaire et la figure 5.10 (b), la contrainte de cisaillement apparente dans cette phase. Le terme inertiel est toujours négligeable ici et l'équilibre des forces se résume alors à l'équilibre entre la divergence des contraintes de cisaillement apparente dans la phase granulaire qui est compensée par la somme du terme de traînée et du terme de flottabilité. Ces forces sont non négligeables uniquement dans la couche de grains mobiles. Dans cette zone de l'écoulement, l'erreur maximale commise est de l'ordre de  $10^{-2} \eta_f \dot{\gamma}/d$  et elle oscille ensuite dans la zone statique du lit de grains entre  $-6 \cdot 10^{-2}$  et  $8 \cdot 10^{-2} \eta_f \dot{\gamma}/d$ . Comme pour l'équilibre vertical, l'erreur commise dans la zone statique vient du fait qu'on moyenne temporellement une région qui est statique, et comme pour l'équilibre vertical, c'est le terme de divergence de la contrainte granulaire qui le principal responsable de ces erreurs. La contrainte granulaire,  $\Sigma^p$ , possède deux contributions : celle du tenseur de Reynolds  $\rho_p \phi \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle^p$  qui est négligeable ici et celle des contacts entre les grains  $n \langle s^s \rangle^p$ . Or il y a relativement "peu" de contacts entre grains et comme nous sommes dans la zone statique du lit, ils ne sont jamais renouvelés durant la simulation. Ceci explique pourquoi l'erreur augmente autant dans la zone statique pour la phase granulaire. Notons que ces erreurs, bien que non négligeables, ne sont pas cruciales pour extraire des informations de ces simulations. En effet, elles sont localisées dans la zone statique du lit de grains où  $\phi$  est presque constant et où les vitesses moyennes des phases fluide et granulaire sont aussi environ constantes et nulles. Si on souhaite déduire de ces simulations la rhéologie apparente des phases équivalentes, la plupart de ces informations viennent de la couche mobile (où  $\phi$ ,  $\langle u \rangle^f$  et  $\langle u \rangle^p$  varient).

La figure 5.10 (b) montre que la contrainte de cisaillement apparente dans la phase granulaire augmente à partir de 0 dans la couche de grain mobile pour atteindre son maximum dans la zone statique du lit de grains, où elle est presque constante. Ce maximum de contrainte de cisaillement prend la même valeur que la contrainte dans la phase fluide loin du lit de grains. On peut donc en conclure que la contrainte de cisaillement apparente à laquelle est soumis le fluide au-dessus du lit est ensuite reprise par la phase granulaire dans le lit de grains, la transition entre ces deux domaines correspondant à la couche de grains mobiles. Comme précédemment, on calcule l'intégrale de termes autres que la contrainte afin d'estimer l'erreur de la méthode de changement d'échelle cumulée sur l'ensemble du domaine. Ici, elle représente environ 5% de la contrainte de cisaillement apparente, au maximum.

L'étude de la dépendance des résultats mésoscopiques avec  $h_g$  aboutie aux mêmes constatations que pour la phase fluide. Cette étude est présentée dans l'annexe G.

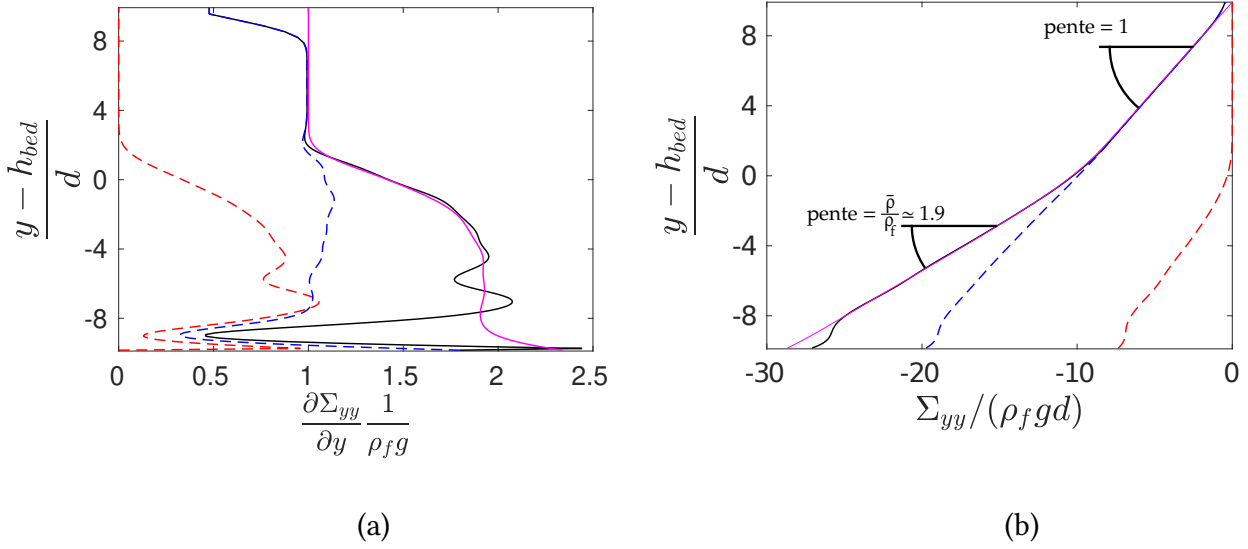
## 5.2.4 Bilan de quantité de mouvement de la phase de mélange

### Équilibre vertical

La projection de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la phase granulaire (5.26) sur l'axe vertical  $y$  mène à l'équation suivante en régime stationnaire (on omet les termes advectifs ici car nous avons vu précédemment qu'ils étaient négligeables) :

$$0 = \frac{\partial \Sigma_{yy}^{tot}}{\partial y} + \bar{\rho}g. \quad (5.33)$$

On reconnaît l'équation d'un équilibre hydrostatique, mais ici  $\bar{\rho}$  n'est pas constant. On trace ces deux termes sur la figure 5.11 (a). On trace également les contributions du fluide  $\frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y}$  et des grains  $\frac{\partial \Sigma_{yy}^p}{\partial y}$ . L'écart entre  $\bar{\rho}g$  et  $\frac{\partial \Sigma_{yy}^{tot}}{\partial y}$  permet d'estimer l'erreur locale de la méthode de changement d'échelle. Sur la figure 5.11 (b), On trace  $\Sigma_{yy}^{tot}$  en fonction de  $y$  ainsi que les contributions de la phase fluide  $\Sigma_{yy}^f$  et de la phase granulaire  $\Sigma_{yy}^p$ . On trace également l'intégrale de  $\bar{\rho}g$  en partant du haut du domaine. La différence entre cette intégrale et la contrainte normale totale  $\Sigma_{yy}^{tot}$  permet d'estimer l'erreur cumulée de la méthode de changement d'échelle.



**FIGURE 5.11** – (a) : Profils des forces appliquées à la phase de mélange. (noir –) : divergence de la contrainte normale apparente dans la phase de mélange  $\frac{\partial \Sigma_{yy}^{tot}}{\partial y}$ ; (bleu - -) : contribution de la phase fluide  $\frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y}$ ; (rouge - -) : contribution de la phase granulaire  $\frac{\partial \Sigma_{yy}^p}{\partial y}$ ; (magenta –) : poids de la phase de mélange. (b) : Profils de contrainte normale apparente dans la phase de mélange. (noir –) : contrainte normale apparente dans la phase de mélange  $\Sigma_{yy}^{tot}$ ; (bleu - -) : contribution de la phase fluide  $\Sigma_{yy}^f$ ; (rouge - -) : contribution de la phase granulaire  $\Sigma_{yy}^p$ ; (magenta –) : intégrale du poids de la phase de mélange depuis le haut du domaine. D’après l’équation (5.33), cette intégrale et la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^{tot}$  doivent être égales; l’écart entre ces deux courbes représente l’erreur de la méthode de changement d’échelle, cumulée depuis le haut du domaine de simulation.

La figure 5.11 (a) montre que la densité du mélange est constante dans le fluide pur puis augmente (car  $r > 1$ ) lorsqu’on s’enfonce dans le lit de grains. Elle devient à nouveau à peu près constante dans la zone statique du lit de grains, pour laquelle  $\phi \simeq \phi_m$ . Loin des rugosités collées au fond du lit, l’écart entre la divergence de la contrainte totale et le poids de la phase de mélange atteint environ 8% au maximum ici. Les erreurs sont encore principalement faites dans le lit de grains et plus particulièrement dans la zone statique de ce dernier.

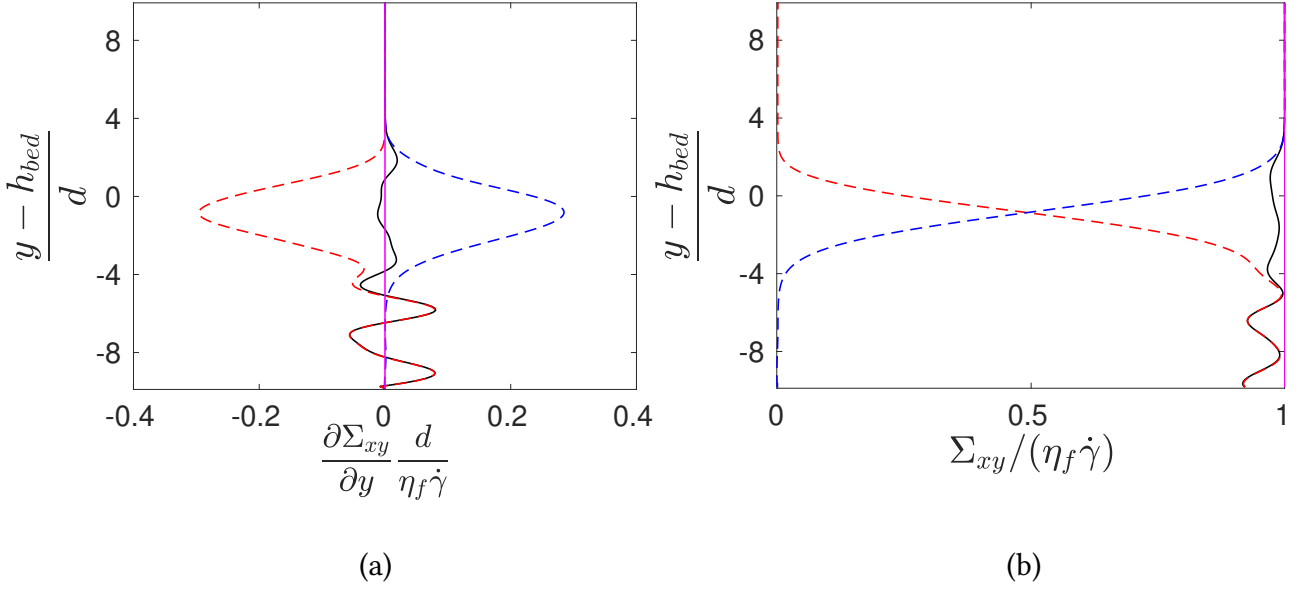
La figure 5.11 (b) présente le profils de contrainte normale dans la phase de mélange  $\Sigma_{yy}^{tot}$ . Cette contrainte augmente à peu près linéairement avec la profondeur avec une brisure de pente lors du passage de l’interface fluide - milieu granulaire immergé car la densité du mélange augmente. Dans le fluide pur, la pente vaut 1, tandis que dans le lit statique elle vaut  $\bar{\rho}/\rho_f \simeq 1.9$ . L’erreur de la méthode de changement d’échelle intégrée sur le domaine de simulation reste très faible (de l’ordre de  $0.1\rho_f g d$  au maximum) dans l’ensemble du domaine, à l’exception de la zone d’influence du fond rugueux.

### Équilibre dans le sens de l’écoulement

On s’intéresse désormais à l’équilibre de la phase de mélange dans le sens de l’écoulement. On projette l’équation (5.26) sur l’axe  $x$ . On obtient alors, en négligeant le terme inertiel :

$$0 = \frac{\partial \Sigma_{xy}^{tot}}{\partial y}. \quad (5.34)$$

On trouve que la contrainte de cisaillement totale  $\Sigma_{xy}^{tot}$  doit être constante sur toute la hauteur du domaine considéré. On trace la contrainte de cisaillement totale  $\Sigma_{xy}^{tot}$  sur la figure 5.12 (b) et on trace sa dérivée sur la figure 5.12 (a).



**FIGURE 5.12** – (a) : Forces moyennes appliquées à la phase équivalente de mélange dans la direction verticale. (noir –) :  $\frac{\partial \Sigma_{xy}^{tot}}{\partial y}$  ; (rouge - -) :  $\frac{\partial \Sigma_{xy}^p}{\partial y}$  ; (bleu - -) :  $\frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y}$  ; (magenta –) : 0. L'écart entre  $\frac{\partial \Sigma_{xy}^{tot}}{\partial y}$  et 0 permet d'estimer l'erreur commise lors du changement d'échelle. (b) : (noir –) : contrainte de cisaillement apparente dans la phase de mélange  $\Sigma_{xy}^{tot}$  ; (bleu - -) : contribution du fluide  $\Sigma_{xy}^f$  à la contrainte totale  $\Sigma_{xy}^{tot}$  ; (rouge - -) : contribution des grains  $\Sigma_{xy}^p$  à la contrainte totale  $\Sigma_{xy}^{tot}$  ; (magenta –) : 1. L'écart entre  $\Sigma_{xy}^{tot}$  et 1 représente l'erreur commise lors du changement d'échelle.

On peut voir sur la figure 5.12 (a) que l'erreur locale commise sur les forces agissant sur la phase de mélange reste inférieure à  $10^{-2} \eta_f \dot{\gamma} / d$  dans la couche de grains mobiles. Dans cette direction également, les erreurs commises sont localisées dans la zone statique du lit de grains et viennent des contributions de la phase granulaire. L'erreur atteint environ  $7 \cdot 10^{-2} \eta_f \dot{\gamma} / d$  dans cette zone. Sur la figure 5.12 (b), on a tracé la contrainte de cisaillement apparente dans la phase de mélange  $\Sigma_{xy}^{tot}$ . Cette contrainte est censé être constante sur toute l'épaisseur du domaine simulé, la constante étant imposées via la condition limite en haut de domaine. Ici, après normalisation de la contrainte par  $\eta_f \dot{\gamma}$ , elle devrait valoir 1 partout. En pratique, l'hypothèse de séparation d'échelle n'est pas parfaitement respectée et des erreurs non nulles subsistent. Ici, elle ne dépassent pas 3.4% dans la couche de grains mobiles et 7.5% dans la zone statique.

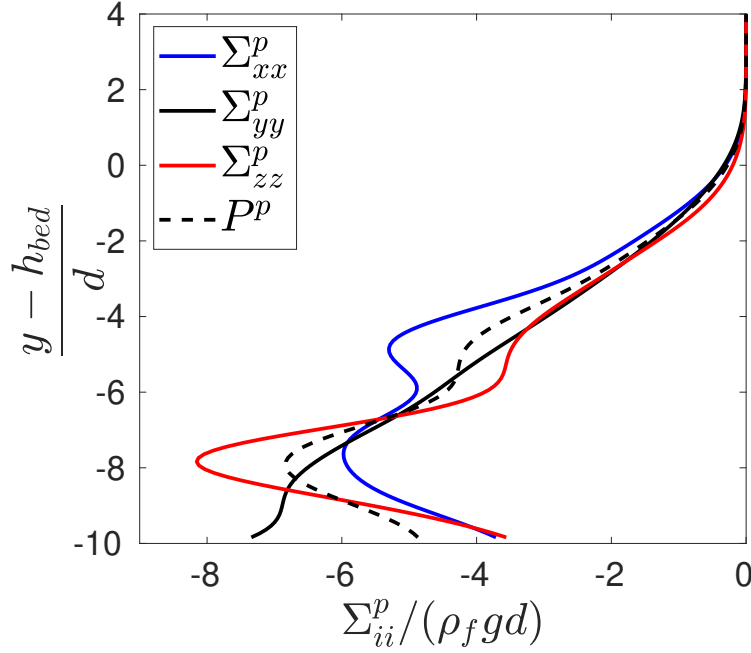
Finalement, bien que la notion de vitesse de mélange ne soit pas toujours évidente à interpréter, la dynamique de la phase de mélange s'avère particulièrement simple (en régime stationnaire du moins).

### 5.2.5 Pression granulaire et différences de contraintes normales

On a déjà présenté les deux composantes  $\Sigma_{yy}^p$  et  $\Sigma_{xy}^p$  du tenseur des contraintes apparentes dans la phase granulaire dans les sections précédentes. Ici, on présente les composantes diagonales de ce tenseur ainsi que la pression granulaire et les différences de contraintes normales observées (pour  $h_g = d$ ). La pression granulaire est définie comme la partie diagonale et isotrope du tenseur des contraintes :

$$P^p = -\frac{1}{3} (\Sigma_{xx}^p + \Sigma_{yy}^p + \Sigma_{zz}^p) . \quad (5.35)$$

La figure 5.13 présente les composantes diagonales du tenseur des contraintes apparentes  $\Sigma^p$  dans le milieu granulaire ainsi que la pression granulaire.



**FIGURE 5.13** – Profils verticaux de l'ensemble des composantes diagonales du tenseur des contraintes apparentes dans la phase granulaire,  $\Sigma_{ii}^p$  pour  $i = x, y, z$  (en traits pleins). (---) : Pression granulaire  $P^p$  définie par l'équation (5.35).

On remarque sur la figure 5.13 que les contraintes normales sont du même ordre de grandeur ce qui traduit une certaine isotropie du milieu granulaire. Toutefois, la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^p$  varie linéairement dans le lit de grains contrairement aux contraintes normales  $\Sigma_{xx}^p$  et  $\Sigma_{zz}^p$  qui dévient légèrement de part et d'autre de  $\Sigma_{yy}^p$ . La contrainte  $\Sigma_{yy}^p$  est engendrée par la pesanteur et les deux autres contraintes normales sont des réactions du milieu granulaire (à la contrainte  $\Sigma_{yy}^p$  ainsi qu'à l'écoulement). On remarque que  $|\Sigma_{xx}^p| \simeq |\Sigma_{yy}^p| \simeq |\Sigma_{zz}^p|$  pour  $-3 \leq (y - h_{bed})/d \leq 0$ ;  $|\Sigma_{xx}^p| \geq |\Sigma_{yy}^p| \geq |\Sigma_{zz}^p|$  pour  $-7 \leq (y - h_{bed})/d \leq -3$  et  $|\Sigma_{xx}^p| \leq |\Sigma_{yy}^p| \leq |\Sigma_{zz}^p|$  pour  $-9 \leq (y - h_{bed})/d \leq -7$ . On définit les différences de contraintes normales  $N_1^p$  et  $N_2^p$  comme :

$$N_1^p = \Sigma_{xx}^p - \Sigma_{yy}^p, \quad (5.36)$$

et

$$N_2^p = \Sigma_{yy}^p - \Sigma_{zz}^p. \quad (5.37)$$

Pour  $-7 \leq (y - h_{bed})/d \leq -3$ , on a  $N_2^p \leq N_1^p \leq 0$ ; avec  $\max|N_1^p| \simeq 1.75|\Sigma_{xy}^p|$  et  $\max|N_2^p| \simeq 0.75|\Sigma_{xy}^p|$  (qui vaut 1 ici, avec l'échelle de contrainte  $\rho_f g d$ ).

Pour  $-9 \leq (y - h_{bed})/d \leq -7$ , nous n'interprétons pas les différences de contraintes normales car elles sont principalement situées en profondeur dans le lit de grains, zone dans laquelle les erreurs de prise de moyenne sont non-négligeables.

Finalement, la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^p$  possède le comportement attendu de la pression granulaire. Toutefois, on observe des différences de contraintes normales non nulles ce qui perturbe l'évolution de la pression granulaire  $P^p$  (qui serait linéaire sinon).

Notons que le tenseur des contraintes apparentes dans la phase granulaire  $\Sigma^p$  est symétrique ici, ce qui traduit l'équilibre des moments appliqués au VER. Les composantes de ce tenseur  $\Sigma_{xz}^p$ ,  $\Sigma_{zx}^p$ ,  $\Sigma_{yz}^p$  et  $\Sigma_{zy}^p$ , non présentées ici, sont soit nulles, soit faibles (dans le lit statique). Ces valeurs non nulles ne

sont probablement pas significatives et seraient alors liées aux limites de l'approche par statistiques temporelles dans cette région.

### 5.2.6 Couplage entre les phases fluide et granulaire - $n\langle \mathbf{f} \rangle^p$

Le couplage entre les deux phases apparentes est réalisé par l'interaction moyenne  $n\langle \mathbf{f} \rangle^p$  et peut être décomposé en deux contributions :  $n\langle \mathbf{f} \rangle^p = \phi \nabla \cdot \Sigma^f + n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p$ . La première contribution correspond à la poussée d'Archimède généralisée à des fluides en écoulement. Le second terme correspond à l'ensemble des autres interactions fluide-grains possibles : traînée, portance, effets de masse ajoutée, force de BASSET, corrections de FAXÉN, *etc...*

Ce couplage intervenant dans les équations mésoscopiques s'exprime et se calcule à partir de quantités microscopiques. Afin de fermer le système d'équations mésoscopiques, on doit exprimer le terme  $n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p$  en fonction des quantités mésoscopiques.

La force moyenne  $n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p$  est généralement décomposée de la façon suivante :

$$n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p = \mathbf{F}_D + \mathbf{F}_M + \mathbf{F}_L, \quad (5.38)$$

où  $\mathbf{F}_D$  représente la force de traînée,  $\mathbf{F}_M$  la force de masse ajoutée et  $\mathbf{F}_L$  la force de portance moyenne appliquée à la phase équivalente granulaire. Les autres contributions sont négligées. Une liste exhaustive est disponible dans DREW et LAHEY (1993).

Commençons par la force de masse ajoutée. L'expression exacte dérivée par ZHANG et PROSPERETTI (1994) mène, dans le cas d'un fluide incompressible et d'une faible concentration en particule de forme sphérique  $\phi \ll 1$ , à exprimer cette force comme :

$$\mathbf{F}_M = \frac{1}{2} \rho_f \phi \left( \frac{D_f \langle \mathbf{u} \rangle^f}{Dt} - \frac{D_p \langle \mathbf{u} \rangle^p}{Dt} \right). \quad (5.39)$$

Pour de plus grandes valeurs de  $\phi$ , on suppose généralement qu'on peut remplacer le facteur  $\frac{1}{2}$  par un coefficient de masse ajouté dépendant de  $\phi$  :  $C_M(\phi)$ . Dans le cas présent,  $\frac{D_f \langle \mathbf{u} \rangle^f}{Dt}$  et  $\frac{D_p \langle \mathbf{u} \rangle^p}{Dt}$  sont négligeables, et on trouve alors que cette contribution est nulle.

On s'intéresse ensuite à la force de traînée moyenne  $\mathbf{F}_D$ . RICHARDSON et ZAKI (1954) ont proposé une expression de cette force qui convient à la fois pour les faibles et les grands nombres de Reynolds pour des suspensions homogènes de particules sphériques dans un milieu infini :

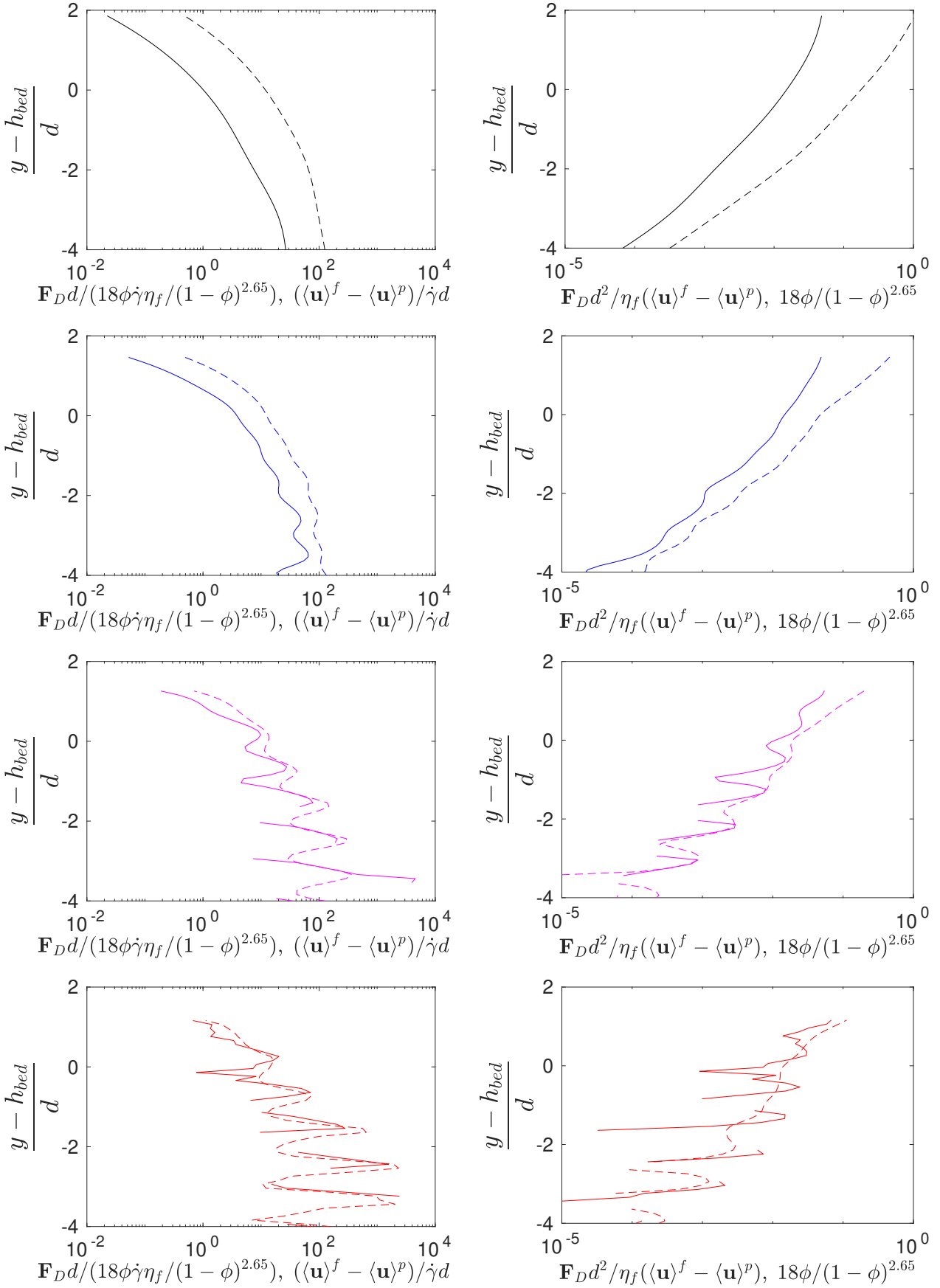
$$\mathbf{F}_D = \frac{(\rho_p - \rho_f) \phi g}{V_t (1 - \phi)^{l-2}} (\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p), \quad (5.40)$$

où  $V_t$  est la vitesse terminale d'une particule en sédimentation et où l'exposant  $l$  dépend du nombre de Reynolds. Dans notre cas, à faible nombre de Reynolds, on suppose que la vitesse terminale  $V_t$  est la vitesse de Stokes  $V_s$ . Pour les nombres de Reynolds  $Re_p = 0.1$  et  $1$ , RICHARDSON et ZAKI (1954) donnent  $l = 4.65$  et pour  $Re_p = 10$ , la valeur de  $l$  dépend du nombre de Shields  $\theta$  considéré (ils donnent  $l$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re_t$  basé sur la vitesse  $V_t$ ;  $Re_t = \frac{Re_p}{18\theta}$  en prenant  $V_t = V_s$ ). Ici,  $Re_p = 1$ , on prend donc  $l = 4.65$  et on suppose qu'on peut remplacer  $V_t$  par  $V_s$  dans l'équation (5.40). On obtient l'expression suivante de la force volumique moyenne de traînée :

$$\mathbf{F}_D = \frac{18\phi\eta_f}{d^2(1 - \phi)^{l-2}} (\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p). \quad (5.41)$$

Afin de vérifier la cohérence de la force de traînée mesurée après homogénéisation vis-à-vis de l'expression (5.41), on trace pour différentes valeurs de  $h_g$  les rapports  $\mathbf{F}_D d^2 / \eta_f (\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p)$ , que l'on compare à  $\frac{18\phi}{(1-\phi)^{l-2}}$ , et  $\mathbf{F}_D d / (\frac{18\phi\dot{\gamma}\eta_f}{(1-\phi)^{l-2}})$ , que l'on compare à  $(\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p) / \dot{\gamma} d$ , sur la figure 5.14. On se limite au cas pour lequel  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ .





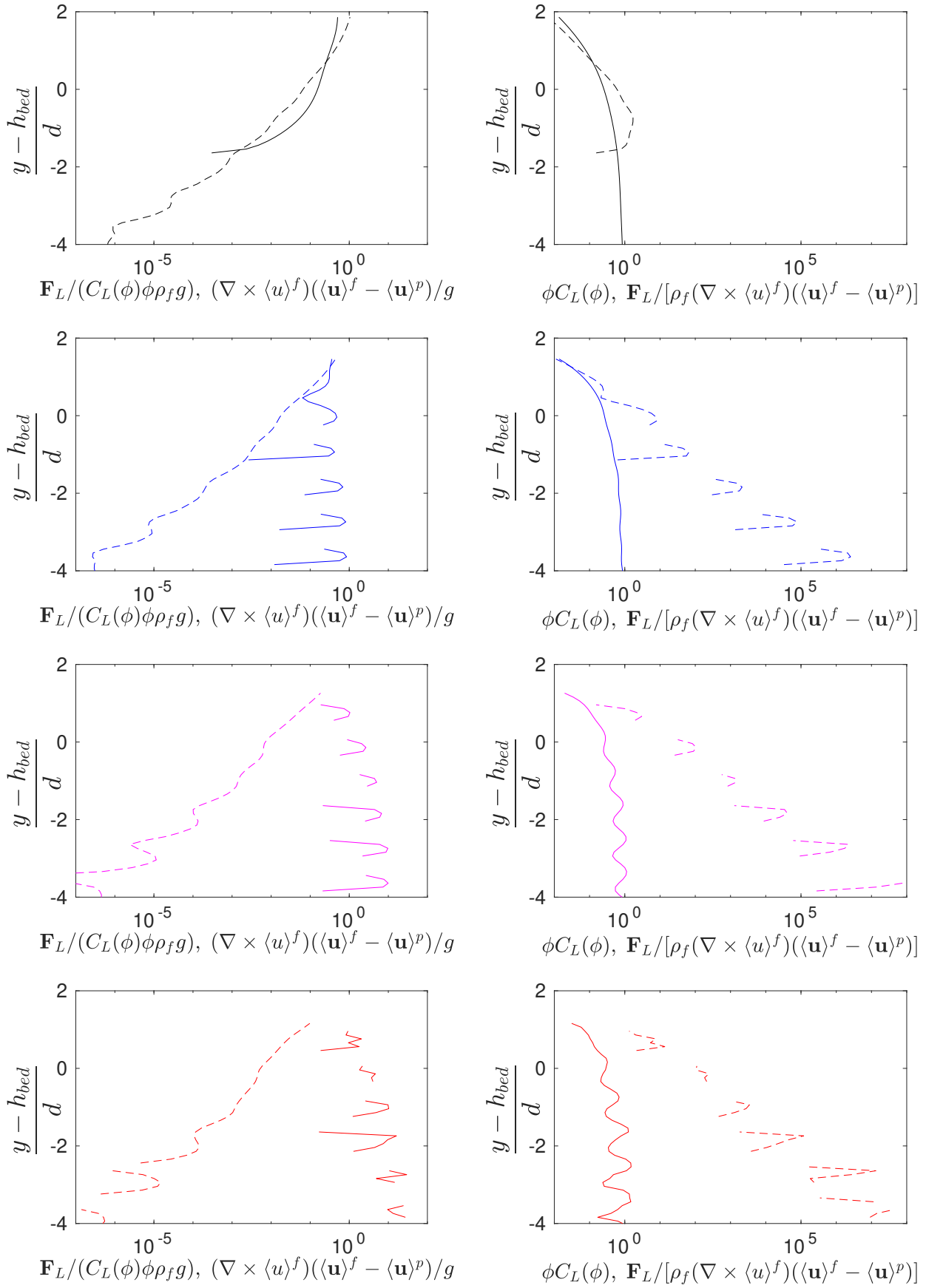
**FIGURE 5.14** – (colonne de gauche) :  $(\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p)/\dot{\gamma}d$  en traits pleins (–) et  $\mathbf{F}_D d / (18\phi\dot{\gamma}\eta_f/(1-\phi)^{2.65})$  en pointillés (– –) pour (1<sup>ère</sup> ligne –) :  $h_g = d$ ; (2<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/2$ ; (3<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/4$ ; (4<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/10$ . (colonne de droite) :  $\mathbf{F}_D d^2 / \eta_f (\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p)$  en traits pleins (–) et  $18\phi/(1-\phi)^{2.65}$  en pointillés (– –) pour (1<sup>ère</sup> ligne –) :  $h_g = d$ ; (2<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/2$ ; (3<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/4$ ; (4<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/10$ .

La figure 5.14 montre que quand  $h_g$  diminue, la relation (5.41) est d'autant mieux vérifiée, mais qu'en contrepartie apparaissent des fluctuations d'autant plus fortes. Pour les plus grandes valeurs de  $h_g$ , la vitesse de glissement à l'échelle mésoscopique  $\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p$  augmente artificiellement à cause de la variation rapide de  $\phi$  à la surface de lit de grains et de la méthode de changement d'échelle ; on ne vérifie alors plus l'expression de la force de traînée (5.41). Malgré cela, nos résultats suggèrent que l'expression de la force de traînée moyenne proposée par RICHARDSON et ZAKI (1954) est une bonne approximation.

On se penche à présent sur la force de portance moyenne  $\mathbf{F}_L$ . Cette force est bien plus faible (en norme) que la force de traînée (voir les figures 5.6 et 5.8 ou 5.9 et 5.10). ZHANG et PROSPERETTI (1994) proposent également une expression pour cette force :

$$\mathbf{F}_L = C_L(\phi) \rho_f \phi (\nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle^f) (\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p), \quad (5.42)$$

où  $C_L = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\phi$  est le coefficient de portance (ZUBER (1964)). De la même façon que pour la force de traînée, on trace sur la figure 5.15  $\mathbf{F}_L / (C_L(\phi) \phi \rho_f g)$ , que l'on compare à  $(\nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle^f) (\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p) / g$ , et  $\mathbf{F}_L / [\rho_f (\nabla \times \langle \mathbf{u} \rangle^f) (\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p)]$  que l'on compare à  $C_L(\phi) \phi$ .



**FIGURE 5.15** – (colonne de gauche) :  $\mathbf{F}_L / (C_L(\phi)\phi\rho_f g)$  en traits pleins (–) et  $(\nabla \times \langle u \rangle^f)(\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p)/g$  en pointillés (– –) pour (1<sup>ère</sup> ligne –) :  $h_g = d$ ; (2<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/2$ ; (3<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/4$ ; (4<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/10$ .  
(colonne de droite) :  $\phi C_L(\phi)$  en traits pleins (–) et  $\mathbf{F}_L / [\rho_f(\nabla \times \langle u \rangle^f)(\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p)]$  en pointillés (– –) pour (1<sup>ère</sup> ligne –) :  $h_g = d$ ; (2<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/2$ ; (3<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/4$ ; (4<sup>ième</sup> ligne –) :  $h_g = d/10$ .

Ici aussi, on peut voir que les termes contenant  $\langle \mathbf{u} \rangle^f - \langle \mathbf{u} \rangle^p$  ne convergent pas lorsque  $h_g$  augmente. De plus, le terme  $\mathbf{F}_L / (C_L(\phi)\phi\rho_f g)$  ne semble pas converger non plus lorsque  $h_g$  augmente. La tendance est inversée par rapport à la force de traînée, l'écart entre les courbes augmente lorsque  $h_g$  diminue et nous n'obtenons donc pas des résultats satisfaisants. Rappelons que la force de portance est du même ordre de grandeur que l'erreur de la méthode de changement d'échelle. Cela peut expliquer pourquoi nous n'arrivons pas à vérifier la pertinence de l'expression (5.42) dans ce cas là.

Nous nous heurtons ici à la limite de cette étude. On souhaite parfois utiliser un VER de petite taille mais on a besoin qu'il soit suffisamment grand pour vérifier les équations (5.17) et (5.18). On trouve généralement un compromis satisfaisant, mais ici ce n'est pas le cas. Il faudrait au moins augmenter la taille du domaine afin d'améliorer la qualité des statistiques (instantanées) en obtenant une force plus lissée tout en utilisant un VER de faible épaisseur.

Bien que l'étude présente certaines limites, elle permet néanmoins de vérifier la cohérence de l'expression de la force de traînée (5.41). La force de portance est trop faible (du même ordre de grandeur que l'erreur), quant à elle, pour que nous puissions conclure.

Enfin, on peut noter que ces forces n'interviennent pas dans le cas d'une description à une phase (la phase de mélange) et que le manque d'information sur la force d'interaction fluide-grains moyenne  $n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p$  ne pose donc pas de problème dans ce cas là.

## 5.2.7 Rhéologie des phases équivalentes

On connaît les contraintes apparentes et les vitesses dans chaque phase équivalente. On souhaite maintenant en déduire leurs propriétés rhéologiques. On définit alors la viscosité dynamique apparente de la phase fluide puis le coefficient de friction apparent de la phase granulaire dans la suite de cette section.

### 5.2.7.1 Phase fluide

On souhaite définir la viscosité apparente de la phase fluide. Pour ce faire, on utilise une expression symétrique des contraintes visqueuses (de cisaillement)  $\frac{1}{2} (\Sigma_{xy}^f + \Sigma_{yx}^f)$  à la place de  $\Sigma_{xy}^f$  simplement. Ces deux grandeurs sont en fait presque égales; ici, pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ,  $r = 2.5$  et avec une taille caractéristique  $h_g = d$ , l'écart maximum entre ces contraintes vaut  $0.02\eta_f\dot{\gamma}$ . En effet, comme mentionné précédemment, le tenseur des contraintes apparentes est symétrique. Dans le cas d'une suspension diluée, on peut exprimer le tenseur des contraintes visqueuses comme celui d'un fluide newtonien à l'aide du tenseur des gradients de vitesses de mélange (équation (5.44)). BRINKMAN (1947); JACKSON (1997) et OURIEMI *et al.* (2009) proposent de continuer d'utiliser la même expression dans le cas de suspensions denses. Ici, le milieu granulaire est dilué en surface du lit de grains et se densifie lorsqu'on s'y enfonce, on choisit donc d'utiliser la vitesse de mélange. Elle est définie par la relation :

$$\langle \mathbf{u} \rangle = \phi \langle \mathbf{u} \rangle^p + \epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f. \quad (5.43)$$

Le profil vertical de la vitesse de mélange est tracé sur la figure 5.4. On exprime alors le tenseur des contraintes dans la phase fluide comme si cette phase avait un comportement newtonien :

$$\Sigma_{ij}^f = -P^f \delta_{ij} + \eta_{eq}^f \left( \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right). \quad (5.44)$$

L'emploi de la vitesse de mélange  $\langle \mathbf{u} \rangle$ , plutôt que de la vitesse de la phase fluide  $\langle \mathbf{u} \rangle^f$ , permet de simplifier l'expression du tenseur des contraintes apparentes. En effet, la divergence de la vitesse de mélange est toujours nulle (d'après la somme des équations (5.8) et (5.9)) et alors le terme de viscosité de volume n'a pas besoin d'être pris en compte dans l'expression du tenseur des contraintes apparentes. On a mentionné précédemment que, pour l'écoulement considéré, la vitesse moyenne de la phase fluide  $\langle \mathbf{u} \rangle^f$  était également à divergence nulle. La dissipation due à la viscosité volumique sera donc effectivement négligeable ici.

On utilise la même expression du tenseur des contraintes apparentes que pour un fluide newtonien, mais ici la viscosité apparente n'est pas constante, elle est fonction de la fraction solide  $\phi$  (JACKSON (1997); ZHANG et PROSPERETTI (1997)). Cette fonction peut être calculée explicitement dans le cadre des suspensions diluées :

$$\frac{\eta_{eq}^f}{\eta_f} = 1 + \frac{5}{2}\phi. \quad (5.45)$$

Cette loi est connue sous le nom de relation d'EINSTEIN (1906, 1911). Dérivée dans le cas d'une suspension iso-dense sans contact entre particules, elle n'est valable que pour de très faibles valeurs de fraction volumique solide. Pour des suspensions modérément concentrées, BATCHELOR et GREEN (1972) calculent le terme suivant du développement de  $\eta_{eq}^f$  en puissances de  $\phi$ . Pour cela, ils ont besoin de connaître l'écoulement considéré et ne prennent en compte que les interactions de paires entre particules. Dans le cas d'un écoulement élongationnel, ils trouvent :

$$\frac{\eta_{eq}^f}{\eta_f} = 1 + 2.5\phi + 7.6\phi^2. \quad (5.46)$$

La même expression de la viscosité apparente est aussi valable pour un écoulement de cisaillement à condition de faire des hypothèses supplémentaires sur la distribution de probabilité des positions des particules les unes par rapport aux autres (BATCHELOR et GREEN (1972)). Dans tous les cas, cette relation n'est valable que pour des faibles fractions volumiques de solide, typiquement pour  $\phi \leq 0.1$ . Au-delà de cette fraction volumique, les interactions à plus de deux particules ne peuvent plus être négligées. Le calcul du terme correctif d'ordre 2 nécessitant déjà de connaître la microstructure de l'écoulement ; le calcul des termes d'ordre supérieur devient très difficile et aucune dérivation analytique de ces termes n'existe à ce jour. Ainsi, la viscosité apparente de la phase fluide n'est connue que pour des faibles fractions volumiques de grains. Pour des fractions volumiques plus importantes, la dynamique est gouvernée par les contacts entre grains (et/ou par les forces de lubrification intervenant lors de ces contacts) et alors la contribution de la phase fluide devient faible devant celle de la phase granulaire. Elle est alors le plus souvent négligée. Il est difficile de séparer ces deux contributions de la contrainte totale apparente dans le milieu à l'aide de mesures expérimentales. Des modèles semi-empiriques existent tout de même, on citera en particulier celui de GIBILARO *et al.* (2007) qui donne de bons résultats pour  $\phi \leq 0.4$  et qui exprime la viscosité effective de la phase fluide comme étant :

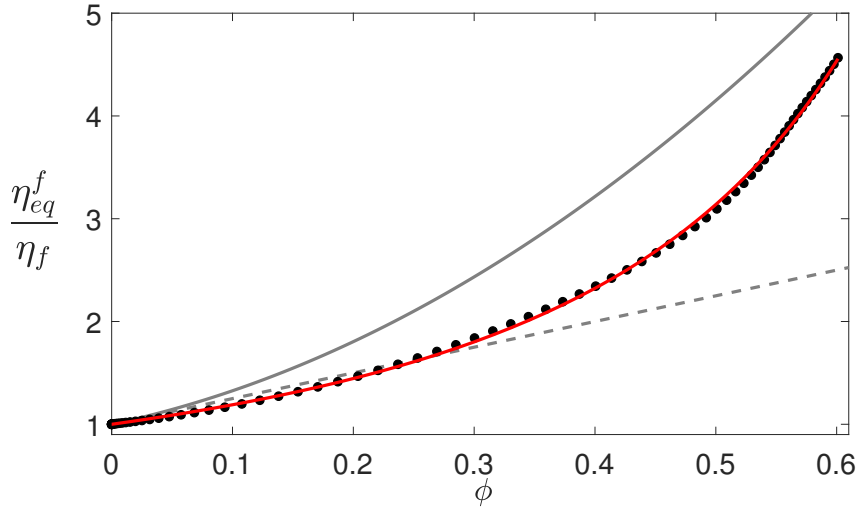
$$\frac{\eta_{eq}^f}{\eta_f} = \epsilon^{-2.8} = (1 - \phi)^{-2.8}. \quad (5.47)$$

Un développement limité au premier ordre de cette expression pour  $\phi \ll 1$  mène à un accord raisonnable avec la relation d'EINSTEIN.

On calcule la viscosité apparente de la phase fluide  $\eta_{eq}^f$  en partant de la relation (5.44), ce qui mène à l'expression suivante de la viscosité apparente de la phase fluide :

$$\eta_{eq}^f = \frac{\frac{1}{2} (\Sigma_{xy}^f + \Sigma_{yx}^f)}{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}}. \quad (5.48)$$

Cette viscosité est une fonction de la fraction volumique  $\phi$ . Dans notre cas, les contraintes apparentes  $\Sigma_{xy}^f$  et  $\Sigma_{yx}^f$  ainsi que le gradient de vitesse  $\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}$  sont des fonctions de la coordonnée verticale  $y$ ; on peut donc facilement exprimer la viscosité apparente de la phase fluide en fonction de  $y$ . La fraction volumique  $\phi$  est également un fonction de  $y$ . De plus, elle varie de façon monotone dans la couche mobile. On peut alors tracer la viscosité en fonction de la fraction volumique de solide  $\phi$ , comme fait sur la figure 5.16 ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ,  $r = 2.5$  et  $h_g = d$ ).

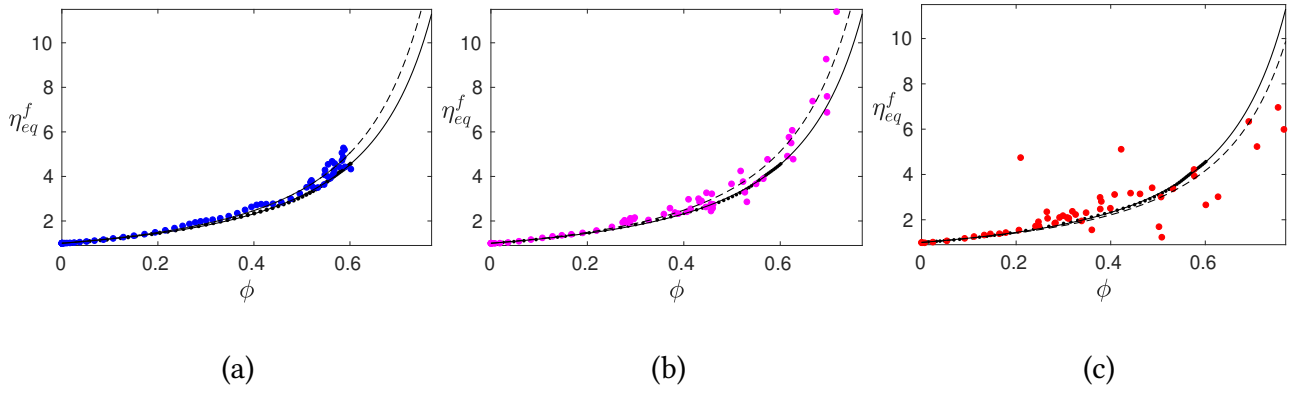


**FIGURE 5.16** – Viscosité apparente de la phase fluide  $\eta_{eq}^f$  en fonction de la fraction volumique de grains  $\phi$  pour  $Re_p = 1$  et  $\theta = 0.67$ . (●) : viscosité apparente mesurée ici; (—) : ajustement de la relation (5.49) avec  $\beta = 1.65$ ; (---) : viscosité d'EINSTEIN (relation (5.45)); (—) : viscosité de la phase fluide de GIBILARO et al. (relation (5.47)).

On obtient une viscosité apparente de la phase équivalente fluide qui croît avec la fraction volumique de solide  $\phi$ . Comme on peut le voir sur la figure 5.16, elle est particulièrement bien approximée par la fonction :

$$\frac{\eta_{eq}^f}{\eta_f} = \epsilon^{-\beta} = (1 - \phi)^{-\beta}, \quad (5.49)$$

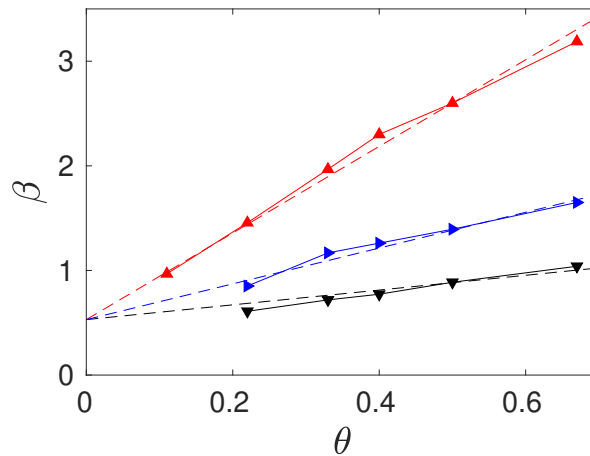
où  $\beta = 1.65$ . La viscosité apparente mesurée est donc plus faible que celles proposées par GIBILARO et al. (2007). La limite pour  $\phi \rightarrow 0$  est la bonne, celle du fluide pur  $\eta_f$ , mais la pente à l'origine de 1.65 est inférieure à la fois à celle donnée par la relation d'EINSTEIN (pente de 2.5) et à celle de GIBILARO et al. (pente de 2.8). Nous sommes dans une situation avec de forts gradients de fraction volumique et de vitesse qui est très différente de l'hypothèse de suspension homogène et diluée faite pour obtenir la relation d'EINSTEIN. On peut aussi noter que, de part la description via une interface diffuse, pour  $h_g = d$ , on a  $\phi(H_m) = 0.08$ . Donc toutes les valeurs de  $\phi \leq 0.08$  correspondent à des hauteurs où il n'y a jamais de grains. Dans cette zone,  $\phi \neq 0$  car  $h_g \neq 0$  et alors la forme de la fonction de pondération choisie peut avoir une influence non négligeable sur les résultats obtenus. On vérifie la convergence avec la taille du domaine et le raffinement du maillage de cet exposant dans l'annexe F et il varie de moins de 5% pour les cas considérés. Sa dépendance avec l'épaisseur caractéristique du VER  $h_g$  est présenté sur la figure 5.17 pour  $Re_p = 1$  et  $\theta = 0.67$ .



**FIGURE 5.17** – (●, ●, ●) Viscosité apparente de la phase fluides  $\eta_{eq}^f$  pour (a) :  $h_g = d/2$ ; (b),  $h_g = d/4$ ; (c) :  $h_g = d/10$ . Sur chaque graphe, la viscosité apparente obtenue pour  $h_g = d$  est aussi tracée en noir (●). On a également tracé le meilleur ajustement (par la relation (5.49)) sur chaque graphe, pour  $h_g = d$  en trait plein ( $\beta = 1.65$ ) et pour (a) :  $\beta = 1.768$ ; (b) :  $\beta = 1.783$ ; (c) :  $\beta = 1.558$ , en pointillés.

La figure 5.17 montre que dispersion de la viscosité apparente de la phase fluide augmente lorsque l'épaisseur  $h_g$  diminue. Pour  $h_g \geq d/4$ , il est encore possible de déduire la viscosité apparente de la phase équivalente fluide à partir des simulations effectuées mais pour  $h_g = d/10$  la dispersion des données est trop grande pour cela. Si on met de côté les fluctuations de la viscosité apparente, lorsque  $h_g$  diminue, la viscosité apparente augmente pendant un temps puis si on diminue trop  $h_g$ , la méthode de changement d'échelle ne donne plus des assez bons résultats pour obtenir une valeur significative de  $\beta$ . Quelle que soit la valeur de  $h_g$ , nous obtenons des valeurs de  $\beta$  relativement faibles comparées à celles des auteurs précédents (entre 2.5 et 2.8); notons qu'ils obtiennent ces valeurs pour des suspensions homogènes.

On peut naturellement se poser la question de la dépendance de cet exposant avec les paramètres  $Re_p$  et  $\theta$ . On trace la valeur de  $\beta$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour les trois nombres de Reynolds particulière  $Re_p$  considérés dans cette étude sur la figure 5.18.



**FIGURE 5.18** – Exposant  $\beta$  (relation (5.49)) en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour (▼) :  $Re_p = 0.1$ ; (►) :  $Re_p = 1$ ; (▲) :  $Re_p = 10$ . On trace en pointillés l'exposant  $\beta$  donné par l'ajustement (5.50) (avec le même code couleur).

La figure 5.18 montre une dépendance linéaire de l'exposant  $\beta$  avec le nombre de Shields  $\theta$ . On constate également que  $\beta$  augmente avec le nombre de Reynolds particulière. Dans la gamme de  $Re_p$  et  $\theta$  explorés ici ( $0.1 \leq Re_p \leq 10$  et  $0.1 \leq \theta \leq 0.7$ ), on obtient  $0.5 \leq \beta \leq 3$  ce qui représente une

plage de variation relativement large. On peut approximer cette dépendance au nombre de Reynolds particulaire par une loi de puissance et on obtient alors l'expression suivante de  $\beta$  en fonction du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  et du nombre de Shields  $\theta$  :

$$\beta = 0.53 + 1.71 \theta Re_p^{0.38}. \quad (5.50)$$

On peut remarquer qu'on obtient la valeur attendue de  $\beta \simeq 2.5$  pour  $Re_p = 10$  et  $\theta \simeq 0.5$ . Cette valeur a été dérivée par EINSTEIN en faisant l'hypothèse que  $\phi \ll 1$  et que l'écoulement est régi par l'équation de Stokes (donc pour  $Re_p \ll 1$ ). Cette hypothèse est d'autant mieux vérifiée que le nombre de Shields  $\theta$  est grand et donc que les grains transportés sont mis en suspension. On pourrait donc s'attendre à obtenir un plateau à  $\beta \simeq 2.5$  quelque soit  $Re_p$  (vérifiant  $Re_p \ll 1$ ) pour les grandes valeurs de  $\theta$ . Nous n'avons sans doute pas exploré des valeurs suffisamment grandes de  $\theta$  pour observer ce palier. Il est important de noter qu'ici le rapport de densité  $\rho_p/\rho_f = 2.5$  contrairement à l'analyse faite par EINSTEIN (1906) pour laquelle  $\rho_p/\rho_f = 1$ .

L'expression de  $\beta$  donnée par la relation (5.50) donne une bonne approximation de  $\beta = \beta(Re_p, \theta)$  comme on peut le voir sur la figure 5.18. Cet ajustement ne prend pas en compte l'existence d'un éventuel plateau. On peut donc décrire la phase apparente fluide comme un fluide newtonien incompressible dont la viscosité est fonction de la densité locale de particules, du nombre de Shields et du nombre de Reynolds. La viscosité apparente de la phase fluide est alors donnée par la relation (5.49) où le paramètre  $\beta$  est donnée par la relation (5.50).

### 5.2.7.2 Phase granulaire

On souhaite maintenant extraire la rhéologie de la phase granulaire apparente. La rhéologie des milieux granulaires s'exprime généralement à l'aide d'un coefficient de friction effectif  $\mu_{eq}^p = \frac{\tau^p}{P^p}$  (où  $\tau^p$  et  $P^p$  sont respectivement la contrainte de cisaillement apparente et la pression apparente dans la phase granulaire). Dans le cas d'un milieu granulaire sec, une analyse dimensionnelle dans le cas de grains rigides indique que le système est contrôlé par un seul paramètre sans dimension :

$$\mathcal{I} = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{P^p/\rho_p}}, \quad (5.51)$$

où  $\dot{\gamma}$  et  $P^p$  sont les valeurs locales du taux de cisaillement et de pression granulaire. Ce paramètre sans dimension est appelé nombre inertiel et a été introduit sous cette forme par CRUZ *et al.* (2003). On peut le voir comme le rapport d'un temps de réarrangement microscopique  $t_\mu$  sur un temps de réarrangement macroscopique  $t_M$  d'un lit de grains. Dans le cas d'un milieu granulaire sec,  $t_\mu = d/\sqrt{P^p/\rho_p}$  et  $t_M = 1/\dot{\gamma}$ . Le comportement macroscopique du milieu granulaire est alors déterminé à l'aide des deux fonctions  $\tau^p = \mu_{eq}^p(\mathcal{I}) P^p$  et  $\phi(\mathcal{I})$ . Cette loi de comportement des milieux granulaires porte le nom de "rhéologie  $\mu(\mathcal{I})$ " (se lit 'mu de I') (GDR MiDi (2004)).

Dans le cadre des milieux granulaire immergés, on souhaite généralement garder la même approche et retrouver le comportement "sec" dans la limite d'un fluide environnant de densité négligeable devant celle des grains ( $r \ll 1$ ) et d'une "faible" viscosité (*i.e.* pour des nombres de Stokes  $St = d\sqrt{P^p/\rho_p}/\eta_f$  vérifiant  $St \gg 1$ ). Toutefois, dans ce cas là le système n'est plus contrôlé par un seul nombre sans dimension et plusieurs régimes existent (visqueux, inertiel ou sec). De la même façon que dans le cas sec, on peut construire un nombre sans dimension qui représente le rapport entre les temps de réarrangement aux échelles microscopique et macroscopique. En considérant le temps de réarrangement microscopique  $t_\mu = d/\sqrt{P^p/\rho_p}$ , on obtient le nombre inertiel  $\mathcal{I}$  défini précédemment et en prenant un temps de réarrangement microscopique basé sur les effets visqueux  $t_\mu = \eta_f/P^p$ , on en déduit le nombre visqueux  $\mathcal{J}$  tel que :

$$\mathcal{J} = \frac{\dot{\gamma}\eta_f}{P^p}, \quad (5.52)$$



comme défini par CASSAR *et al.* (2005) et BOYER *et al.* (2011). On a noté  $|\dot{\gamma}|$  le taux de cisaillement dans les expressions de  $\mathcal{I}$  et  $\mathcal{J}$ ; en pratique, on définit ces nombres de façon locale en substituant le taux de cisaillement local  $\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}(y)$  au taux de cisaillement "global" (loin du lit de grain)  $\dot{\gamma}$  dans leur expressions. TRULSSON *et al.* (2012) proposent de prendre en compte tous les régimes en combinant les nombres inertiel  $\mathcal{I}$  et visqueux  $\mathcal{J}$ . Ils définissent alors un nouveau nombre sans dimension, noté  $\mathcal{K}$ , par :

$$\mathcal{K} = \mathcal{J} + \alpha \mathcal{I}^2, \quad (5.53)$$

où  $\alpha$  est une constante; TRULSSON *et al.* (2012) trouvent  $\alpha = 0.635$  par des simulations 2D, valeur confirmé par LACAZE *et al.* (2020) sur des simulations 3D. On peut remarquer le nombre  $\mathcal{K}$  peut aussi s'écrire  $\mathcal{K} = \mathcal{J}(1 + \alpha Re_{p,loc})$ , où  $Re_{p,loc} = \rho_f \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} d^2 / \eta_f$  est le nombre de Reynolds particulaire local (défini avec la vitesse locale  $\frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} d$ ). Le nombre  $\mathcal{K}$  peut donc être interpréter comme un nombre visqueux avec une correction inertielle. On peut également noter que le nombre visqueux  $\mathcal{J}$  n'est autre qu'un nombre de Shields local. Les expressions présentées ici sont des généralisations des expressions de  $\phi$  et de  $\mu_{eq}^p$  dépendant du nombre  $\mathcal{K}$  (BOYER *et al.* (2011); TRULSSON *et al.* (2012)) :

$$\phi(\mathcal{K}) = \frac{\phi_c}{1 + \mathcal{K}^{1/2}}, \quad (5.54)$$

et

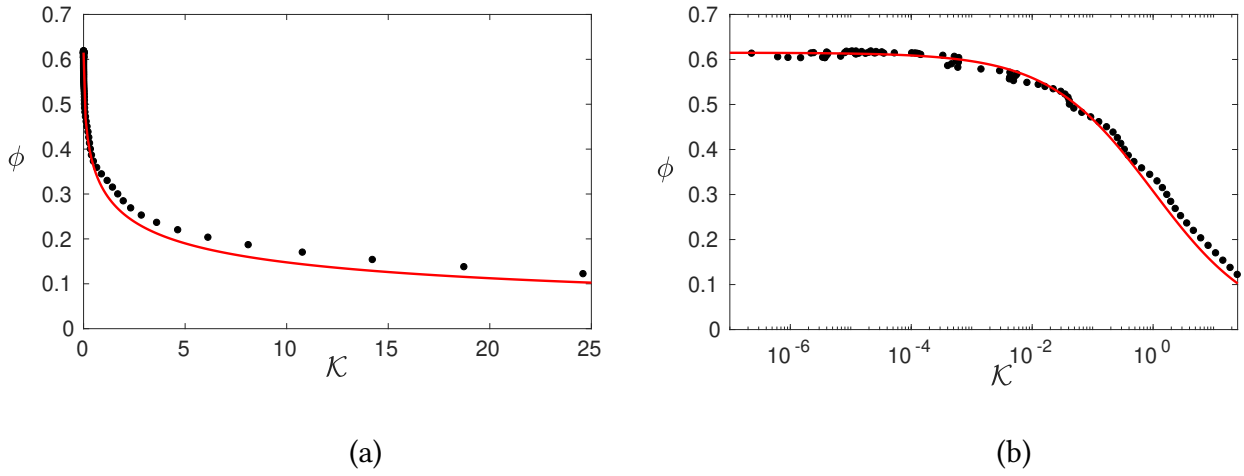
$$\tau_{xy}^p = \mu_{eq}^p(\mathcal{K}) P^p, \quad (5.55)$$

où

$$\mu_{eq}^p(\mathcal{K}) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + (\frac{K_0}{\mathcal{K}})^{1/2}}, \quad (5.56)$$

On peut noter que pour le cas présent ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ ),  $\alpha \mathcal{I}^2$  varie dans la couche de grains mobiles entre la valeur  $10^{-10}$  qu'il prend dans le lit statique et 60 au sommet du lit de grains (pour  $\phi = 0.025$ ).  $\mathcal{J}$  possède la même allure mais prend des valeurs  $10^4$  fois plus grandes dans le lit statique, il devient inférieur à  $\alpha \mathcal{I}^2$  pour  $y - h_{bed} \geq 0.16d$  et augmente jusqu'à 40 au sommet du lit de grains. On est donc effectivement dans un régime visqueux dans le lit de grains ( $\alpha \mathcal{I}^2 \ll \mathcal{J}$ ) à l'exception du sommet de la couche de grains mobiles (sur environ un diamètre de grain ici) où ces deux quantités sont du même ordre de grandeur. On est alors dans un régime intermédiaire dans cette zone du lit de grains. Cette transition entre les régimes visqueux et inertiel au sein du lit de grains nous pousse à considérer le nombre  $\mathcal{K}$  et non  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{J}$ .  $\mathcal{K}$  prend des valeurs comprises entre  $10^{-5}$  et 100 environ ici. Toutefois, les grandes valeurs de  $\mathcal{K}$  sont atteintes au-dessus du lit de grains et sont dues à l'étalement du sommet du lit de grains par la méthode de changement d'échelle. En pratique on se limitera aux valeurs de  $\mathcal{K}$  vérifiant  $\mathcal{K} \leq 25$  afin de ne pas interpréter des résultats dépendant de la forme de la fonction de pondération  $g$  choisie. Cette valeur de 25 pour  $\mathcal{K}$  reste très élevée par rapport à celles explorées par BOYER *et al.* (2011) ( $10^{-6} \leq \mathcal{J} \leq 0.17$ ), par exemple.

La figure 5.19 présente l'évolution de la fraction solide  $\phi$  en fonction du nombre  $\mathcal{K}$  en échelle linéaire et logarithmique. On a également tracé un ajustement du modèle (5.54) sur ces données.



**FIGURE 5.19** – Fraction volumique de grains  $\phi$  en fonction du nombre  $\mathcal{K}$ , (a) : en échelle linéaire; (b) : en échelle logarithmique. (•) : étude présente, (–) : ajustement de la relation (5.54),  $\phi_c = 0.615$ .

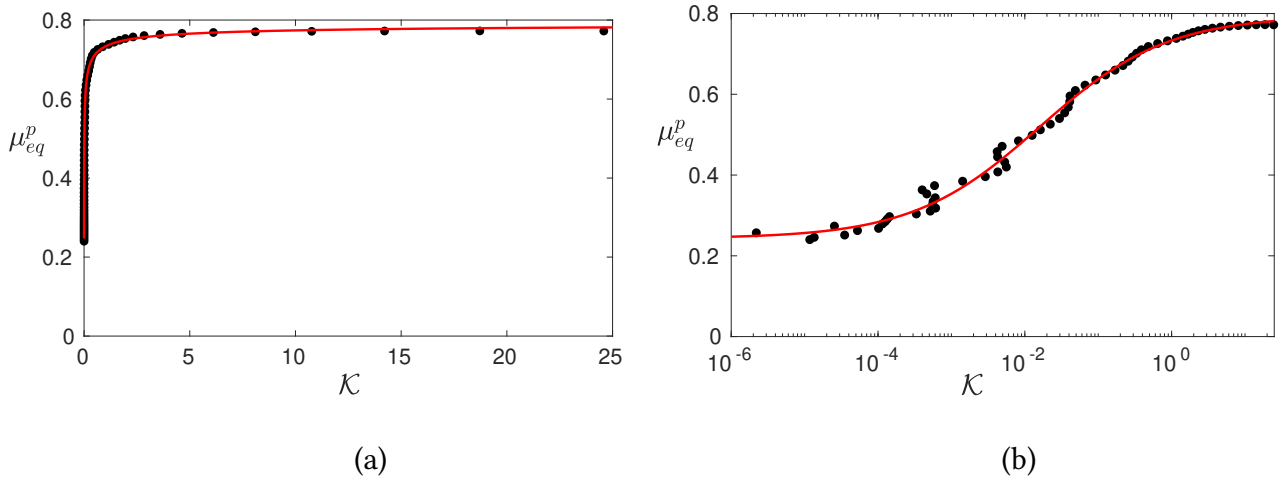
La fraction volumique de solide calculée via la méthode d'homogénéisation (avec  $h_g = d$ ) est très bien décrite par la relation (5.54) pour  $\mathcal{K} \leq 0.1$  en prenant  $\phi_c = 0.615$ . L'erreur sur  $\phi$  augmente ensuite mais reste modérée (environ 0.03 au maximum) jusqu'à  $\mathcal{K} \simeq 25$ . On constate que nos données oscillent légèrement, il s'agit sans doute d'un effet de taille finie dû à la faible extension horizontale du domaine et à l'épaisseur limitée du VER.

On calcule maintenant le coefficient de friction apparent dans la phase granulaire  $\mu_{eq}^p$ . On utilise l'expression suivante :

$$\mu_{eq}^p = \frac{\frac{1}{2} (\Sigma_{xy}^p + \Sigma_{yx}^p)}{-\Sigma_{yy}^p}. \quad (5.57)$$

Comme pour la phase fluide, on utilise une expression symétrique des contraintes de cisaillements apparentes  $\tau_{xy}^p$ . De plus, on utilise la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^p$  et non la pression  $P^p$ . Ce choix semble plus pertinent à cause des petites différences de contraintes normales observées dans le milieu granulaire (voir la section 5.2.5).

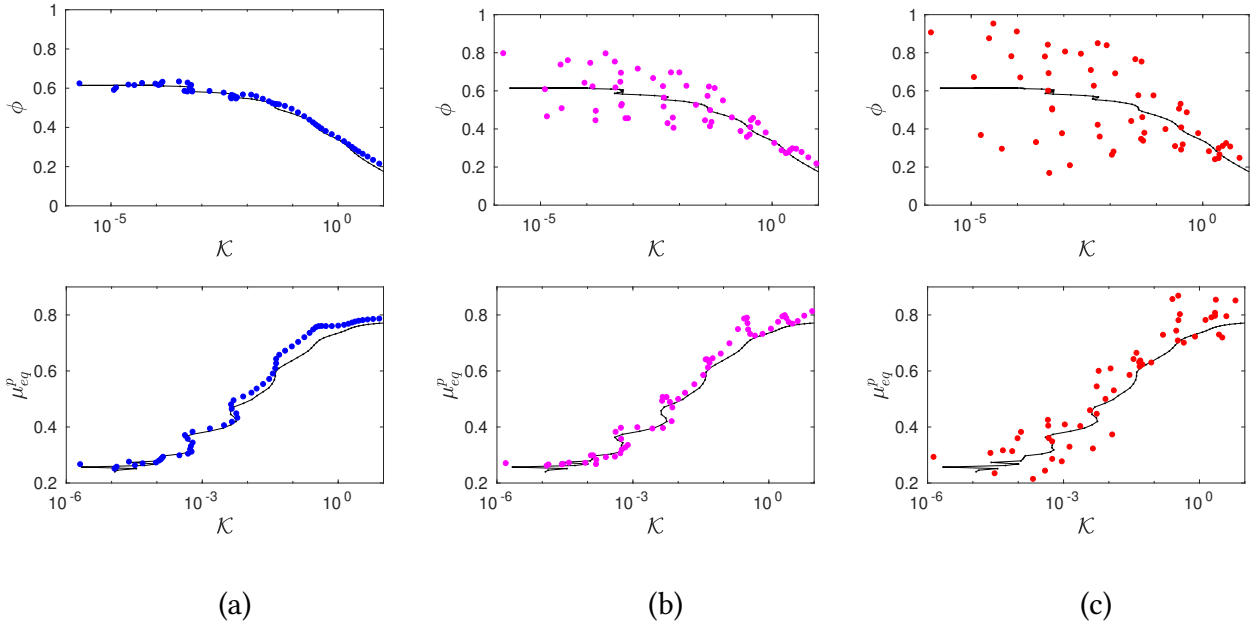
La figure 5.20 montre la dépendance du coefficient de friction effectif  $\mu_{eq}^p$  en fonction du nombre  $\mathcal{K}$ . On a aussi tracé un ajustement du modèle (5.56).



**FIGURE 5.20** – Coefficient de friction effectif de la phase granulaire  $\mu_{eq}^p$  en fonction du nombre  $\mathcal{K}$ , (a) : en échelle linéaire; (b) : en échelle semi-logarithmique. (●) : étude présente, (–) : ajustement de la relation (5.56),  $\mu_1 = 0.243$ ,  $\mu_2 = 0.794$  et  $\sqrt{K_0} = 0.125$ .

On obtient un très bon accord entre le modèle (5.56) et nos données obtenues via la méthode d'homogénéisation développée ici, et ce pour l'ensemble des valeurs de  $\mathcal{K}$  explorées, donc pour  $\mathcal{K} \leq 25$ . On observe, ici aussi, des oscillations du coefficient de friction effectif autour du notre ajustement des données. On obtient, via cet ajustement,  $\mu_1 = 0.243$ ,  $\mu_2 = 0.794$  et  $\sqrt{K_0} = 0.125$ . À des fins de comparaison, on peut citer TRULSSON *et al.* (2012) qui obtiennent, quant à eux,  $\mu_1 = 0.277$ ,  $\mu_2 = 0.85$  et  $\sqrt{K_0} = 0.29$ .

On vérifie ensuite l'influence de l'épaisseur caractéristique du VER  $h_g$  sur les fonctions  $\phi(\mathcal{K})$  et  $\mu_{eq}^p(\mathcal{K})$ . La figure 5.21 présente ces deux quantités pour les différentes valeurs de  $h_g$  considérées.

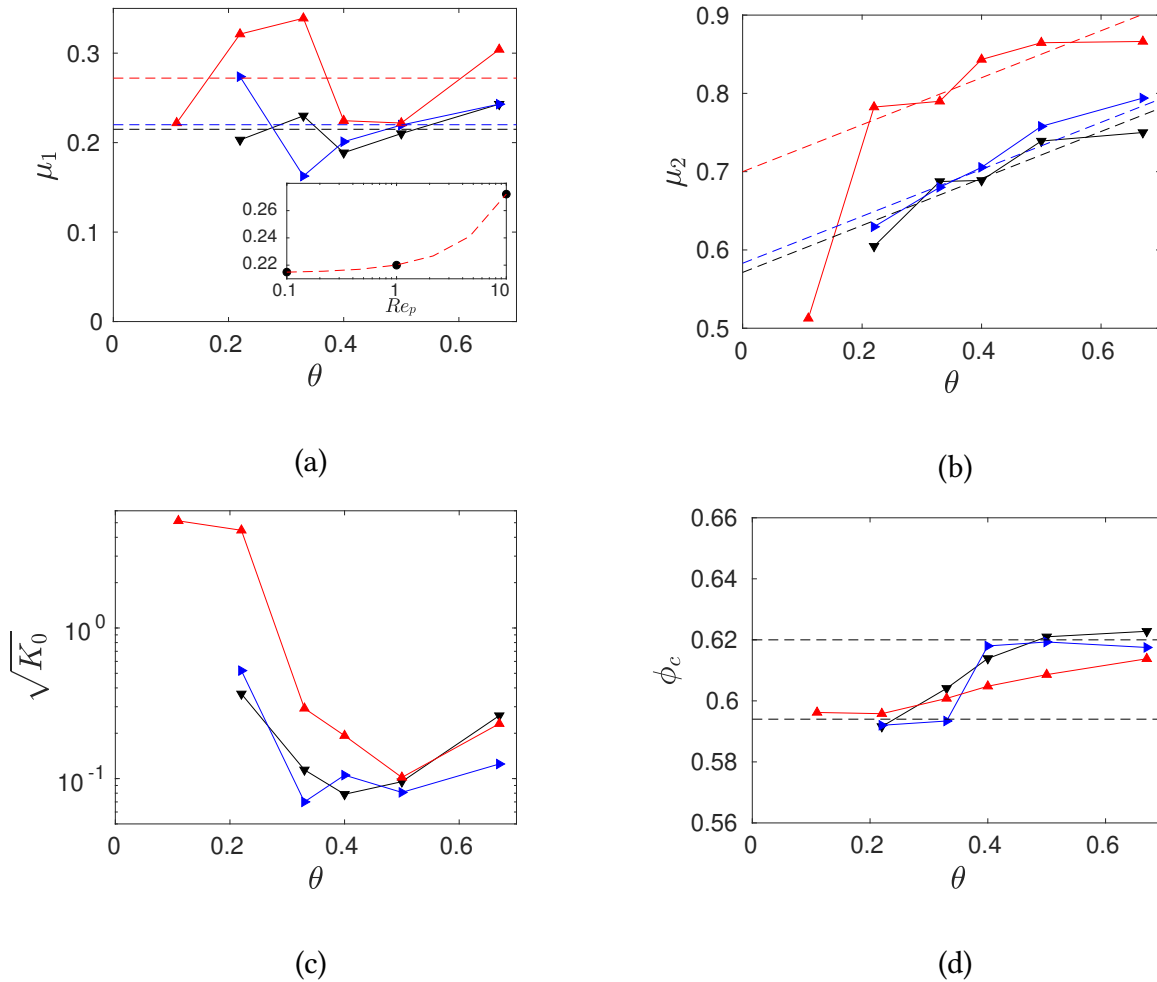


**FIGURE 5.21** – Fraction volumique de grains  $\phi$  (première ligne) et coefficient de friction effectif de la phase granulaire  $\mu_{eq}^p$  (seconde ligne) en fonction du nombre  $\mathcal{K}$ , en échelle semi-logarithmique, pour (a) :  $h_g = d/2$ ; (b) :  $h_g = d/4$ ; (c) :  $h_g = d/10$ . On a aussi tracé en noir, sur chaque graphe, le cas  $h_g = d$  comme référence.

La figure 5.21 montre que les fonctions  $\phi(\mathcal{K})$  et  $\mu_{eq}^p(\mathcal{K})$  fluctuent autour de la valeur obtenue pour  $h_g = d$ . Ces fluctuations sont plus marquées pour les faibles valeurs de  $\mathcal{K}$ , qui correspondent au

fond de la couche mobile de grains, là où la prise de moyenne temporelle ne permet pas d'aussi bien compenser la faible taille du VER que dans le haut de la couche mobile. Plus  $h_g$  est petit, plus les oscillations sont grandes mais elles restent centrées autour des courbes pour  $h_g = d$ , ce qui montre la convergence de ces deux fonctions lorsque  $h_g$  augmente. Cette convergence n'est pas parfaitement atteinte pour  $h_g = d$  puisque des oscillations subsistent.

On peut maintenant se demander comment est modifié le comportement rhéologique de la phase granulaire lorsqu'on fait varier les paramètres sans dimensions. Pour toute la gamme des paramètres testés ici, on utilise les mêmes lois  $\phi(\mathcal{K})$  et  $\mu_{eq}^p(\mathcal{K})$  données par les équations (5.54) et (5.56) mais les valeurs de  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sqrt{K_0}$  et de  $\phi_c$  changent. La figure 5.22 présente l'évolution de ces paramètres avec le nombre de Shields  $\theta$  pour les trois valeurs du nombre de Reynolds considérées.



**FIGURE 5.22** – Coefficients d'ajustement de la rhéologie apparente de la phase granulaire en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour les trois nombres de Reynolds particulière  $Re_p$  considérés. (a) :  $\mu_1$ ; (b) :  $\mu_2$ ; (c) :  $\sqrt{K_0}$  (en échelle semi-logarithmique); (d) :  $\phi_c$ . (▼) :  $Re_p = 0.1$ ; (►) :  $Re_p = 1$ ; (▲) :  $Re_p = 10$ . Pour  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , on a tracé en pointillés les ajustements obtenus (et détaillés ci-dessous). L'insert de la figure (a) montre l'évolution de  $\mu_1$  "moyen" en fonction de  $Re_p$ .

La figure 5.22 (a) présente les valeurs de  $\mu_1$ , ajustée comme sur la figure 5.21, en fonction du nombre de Shields  $\theta$ . Aucune tendance claire ne se dégage, on peut donc supposer que  $\mu_1$  ne dépend pas de  $\theta$ . On peut voir que sa valeur augmente avec le nombre de Reynolds particulière  $Re_p$ , on effectue alors la moyenne des valeurs de  $\mu_1$  pour chaque valeur du nombre de Reynolds et on trace  $\mu_1$  en fonction de  $Re_p$  en insert sur la même figure (en échelle semi-logarithmique). On obtient alors un très bon accord avec un ajustement linéaire d'équation  $\mu_1 = 0.214 + 5.78 \times 10^{-2} Re_p$ .

La figure 5.22 (b) présente  $\mu_2$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$  et cette fois-ci,  $\mu_2$  est une fonction croissante de  $\theta$  et du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ . On obtient un relativement bon accord avec l'ajustement  $\mu_2 = 0.57 + 0.30 \theta + 0.013 Re_p$ . La différence de comportement de  $\mu_1$  et  $\mu_2$  vis-à-vis de  $\theta$  laissent penser qu'ils n'ont pas la même origine physique, *i.e.* que les phénomènes responsables de la friction apparente ne sont pas les mêmes pour les faibles valeurs de  $\mathcal{K}$  et pour les grandes.

La figure 5.22 (c) présente  $\sqrt{\mathcal{K}_0}$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$ . Ce paramètre d'ajustement est globalement décroissant pour  $\theta \leq 0.4 - 0.5$  puis croît pour les plus grands nombres de Shields  $\theta$ . Au minimum,  $\sqrt{\mathcal{K}_0} \simeq 0.1$  et au maximum, proche du seuil de mise en mouvement, on trouve  $\sqrt{\mathcal{K}_0} \simeq 0.5$  à 5 en fonction du nombre de Reynolds particulaire. La valeur de ce paramètre dépend donc fortement de  $Re_p$  et  $\theta$ , il varie sur plus d'un ordre de grandeur ici. Pour  $\theta \geq 0.3$ , les valeurs de  $\sqrt{\mathcal{K}_0}$  obtenues sont du même ordre de grandeur que celles que l'on peut trouver dans la littérature, TRULSSON *et al.* (2012) obtient  $\sqrt{\mathcal{K}_0} = 0.29$  par exemple. L'utilisation de  $\mathcal{K}$ , au lieu de  $\mathcal{I}$  ou  $\mathcal{J}$ , limite les possibilités de comparaisons de ces résultats. Le fait que la valeur de ce paramètre change de comportement pour  $\theta \leq 0.3$  est peut être un signe du fait qu'on atteint les limites de la méthode d'homogénéisation. En effet, plus  $\theta$  est petit, moins la couche de grains mobiles est épaisse. Or, pour satisfaire l'hypothèse de séparation d'échelles, la taille caractéristique de la grande échelle (l'épaisseur de la couche de grain mobile,  $L \simeq \Delta H$ ) doit être grande devant la taille des grains  $d$ .

Enfin, la figure 5.22 (d) présente le coefficient  $\phi_c$  (équation (5.54)) en fonction du nombre de Shields  $\theta$ . Il ne semble pas y avoir de tendance particulière de ce paramètre avec le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ . Pour les faibles valeurs de  $\theta$ , proches du seuil de mise en mouvement,  $\phi_c$  vaut environ 0.594 pour les trois nombre de Reynolds testés. Puis,  $\phi_c$  croît avec le nombre de Shields  $\theta$  et semble tendre vers une valeur maximale d'environ 0.62 pour les grandes valeurs de  $\theta$ . Cette variation avec  $\theta$ , entre 0.594 et 0.62, semble se lisser lorsque le nombre de Reynolds particulaire augmente.

Finalement, la rhéologie apparente du milieu granulaire immergé est bien décrite par la rhéologie  $\mu(\mathcal{K})$  (équations (5.53) à (5.56)) pour l'ensemble des valeurs de  $\mathcal{K}$ ,  $Re_p$  et  $\theta$  explorées ici. En résumé, et schématiquement, on trouve :  $\mu_1 \simeq 0.24$ ,  $\mu_2 \propto \theta \in [0.6, 0.85]$ ,  $\sqrt{\mathcal{K}_0} = f(Re_p, \theta) \in [0.1, 5]$  et  $\phi_c \simeq 0.61$ . On peut également noter que  $\mu_1$  et  $\mu_2$  augmentent un peu et de façon linéaire lorsque le nombre de Reynolds particulaire augmente.

On peut également noter qu'il est possible de décrire la rhéologie de cette phase via un coefficient de viscosité apparent (comme pour la phase fluide). La viscosité apparente  $\eta_{eq}^p$  est alors (localement) reliée au coefficient de friction apparent  $\mu_{eq}^p$  par la relation :

$$\eta_{eq}^p = \mu_{eq}^p \frac{P^p}{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}}. \quad (5.58)$$

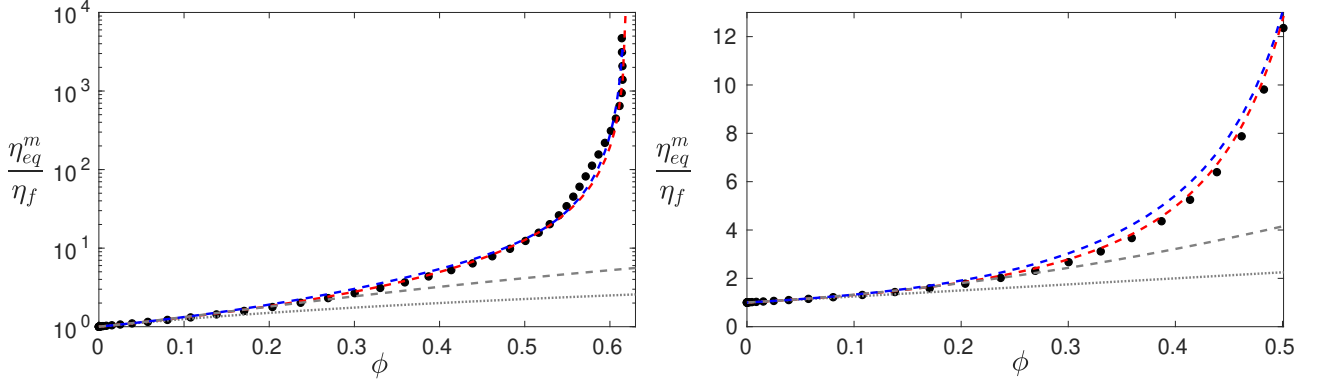
Les formulations présentés ici sont adaptées à un écoulement dans la direction  $x$  et dépendant de la coordonnée  $y$ ; la généralisation à des écoulements plus complexes est possible et ne pose pas de problème particulier.

### 5.2.7.3 Phase de mélange

Nous souhaitons maintenant déterminer les propriétés rhéologiques de la phase de mélange. On choisit de décrire la rhéologie de cette phase à l'aide d'une viscosité apparente, comme pour la phase fluide. Pour cela, on calcule le rapport de la contrainte de cisaillement apparente sur le gradient de vitesse. Comme pour la phase fluide, on utilise le gradient de vitesse de mélange. L'expression de la viscosité apparente de cette phase prend donc la forme suivante :

$$\eta_{eq}^m = \frac{\frac{1}{2} (\Sigma_{xy}^{tot} + \Sigma_{yx}^{tot})}{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}} = \frac{\frac{1}{2} (\Sigma_{xy}^p + \Sigma_{yx}^p + \Sigma_{xy}^f + \Sigma_{yx}^f)}{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}}. \quad (5.59)$$

On trace la viscosité apparente de la phase de mélange  $\eta_{eq}^m$  en fonction de la fraction volumique solide  $\phi$  sur la figure 5.23.



**FIGURE 5.23** – Viscosité apparente de la phase de mélange  $\eta_{eq}^m$  en fonction de la fraction volumique de grains  $\phi$  pour  $Re_p = 1$  et  $\theta = 0.67$ , (a) : en échelle semi-logarithmique; (b) : en échelle linéaire (pour  $\phi \leq 0.5$ ). (●) : étude présente; (gris -) : viscosité d'EINSTEIN (relation (5.45)); (gris - -) : viscosité de BATCHELOR et GREEN (relation (5.46)); (rouge - - -) : viscosité de KRIEGER et DOUGHERTY avec  $\phi_m = 0.62$  (relation (5.60)); (bleu - -) : viscosité de BOYER et al. (2011) avec les coefficients  $\mu_1, \mu_2, \sqrt{K_0}$  et  $\phi_c$  obtenus précédemment.

La viscosité apparente des milieux granulaires denses et immergés est généralement décrite à l'aide du modèle semi-empirique de KRIEGER et DOUGHERTY (1959) :

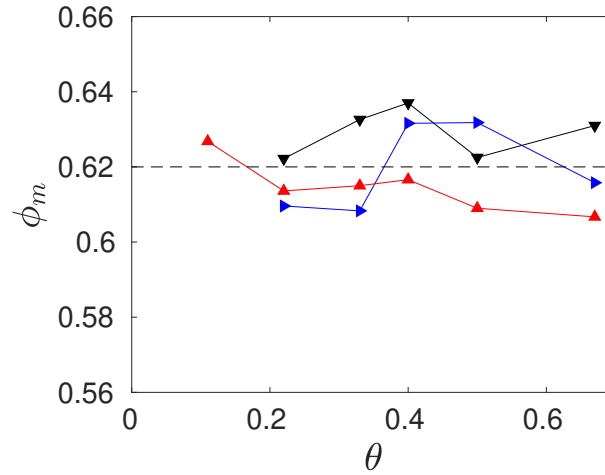
$$\frac{\eta_{eq}^m(\phi)}{\eta_f} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_m}\right)^{-2.5\phi_m}. \quad (5.60)$$

Un ajustement de ce modèle sur nos données est tracé sur la figure 5.23 pour  $\phi_m = 0.62$ . Ce modèle de viscosité diverge pour  $\phi \sim \phi_m$ ; cela correspond à la transition de blocage (jamming transition). Pour les faibles valeurs de fraction volumique solide  $\phi \ll \phi_m$ , on peut effectuer un développement limité de l'expression (5.60) en fonction du petit paramètre  $\phi/\phi_m$ . Au premier ordre, on trouve  $\eta_{eq}^m/\eta_f = 1 + \frac{5}{2}\phi$  ce qui correspond à la viscosité d'EINSTEIN (1906, 1911). Au second ordre, il vient  $\eta_{eq}^m/\eta_f = 1 + \frac{5}{2}\phi + \frac{25\phi_m + 10}{8\phi_m}\phi^2 \simeq 1 + \frac{5}{2}\phi + 5.2\phi^2$ , pour  $\phi_m = 0.6$ . Ceci n'est pas le développement de BATCHELOR et GREEN (1972), qui possède un coefficient un peu différent devant  $\phi^2$  de 7.6 et non 5.2. Cela montre bien la difficulté à trouver une expression satisfaisante pour cette viscosité, qui donne à la fois de bons accords avec les expériences et les développements théoriques sous-jacents. On trace aussi les deux développements théoriques, d'EINSTEIN (équation (5.45)) et de BATCHELOR et GREEN (équation (5.46)), sur la figure 5.23. On voit que la viscosité apparente mesurée suit la relation EINSTEIN pour  $\phi \leq 0.05$ , celle de BATCHELOR et GREEN décrit bien la viscosité apparente de la phase de mélange pour  $\phi \leq 0.25$  et que le modèle de KRIEGER et DOUGHERTY (1959) s'ajuste très bien sur nos données pour  $\phi \leq 0.5$ . Pour les plus grandes valeurs de  $\phi$ , on moyenne des échantillons qui ne sont pas décorrélés car cette région du lit de grains est quasiment statique. Notons, que même dans ces conditions défavorables, la tendance est bien capturée par la méthode développée ici.

Il existe également des corrélations de la viscosité apparente plus récentes que celle de KRIEGER et DOUGHERTY. Celle de BOYER, GUAZZELLI et POULIQUEN (2011), par exemple, est tracée sur la figure 5.23 en utilisant les valeurs des paramètres  $\mu_1, \mu_2, K_0$  et  $\phi_c$  obtenues précédemment (dans la section 5.2.7.2), et montre un accord avec nos résultats, équivalent à celui obtenu avec le modèle de

On peut remarquer que, contrairement à la viscosité apparente de la phase fluide, la viscosité de la phase de mélange est bien décrite par la relation d'EINSTEIN ((5.45)) pour  $\phi \ll 1$ . Cela signifie que dans la configuration considérée, les contacts entre les grains ont un effet non nul même pour  $\phi \ll 1$ ; or la viscosité d'EINSTEIN a été dérivée pour une suspension diluée (sans contribution des contacts inter-particules). Il n'y a donc *a priori* pas de raison que la viscosité apparente de la phase de mélange suive cette loi.

On peut ensuite analyser la dépendance de la rhéologie de la phase de mélange avec les paramètres  $Re_p$  et  $\theta$ . Pour cela, on trace  $\phi_m$  sur la figure 5.24, ajusté comme pour la figure 5.23, en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour les trois valeurs du nombre de Reynolds particulaire considérées.



**FIGURE 5.24** – Fraction volumique de blocage  $\phi_m$  (relation (5.60)) en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ ; ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$ ; ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ . (–) : moyenne de  $\phi_m$  obtenue lors de cette étude.

La figure 5.24 ne montre aucune tendance particulière de  $\phi_m$  avec  $Re_p$  ou  $\theta$ . Dans tous les cas,  $0.6 \leq \phi_m \leq 0.64$  et la valeur moyenne obtenue pour l'ensemble des cas effectués ici est  $\phi_m = 0.62$ . Cette valeur est cohérente avec celles disponibles dans la littérature qui sont généralement comprises entre 0.58 et 0.64. Par exemple, BOYER *et al.* (2011) obtiennent 0.585 et la fraction volumique maximale moyenne d'un empilement aléatoire de sphères (*random close packing*) vaut environ 0.64.

Dans tous les cas effectués, la viscosité apparente de la phase de mélange est bien approximée par le modèle de KRIEGER et DOUGHERTY (relation (5.60)). De plus, un seul exposant  $\phi_m$  semble nécessaire pour décrire l'ensemble des situations explorées et on obtient donc une rhéologie unique de la phase de mélange, indépendante de  $Re_p$  et  $\theta$ ; bien que les contributions relatives des contacts inter-particules et du fluide dépendent de  $Re_p$  et  $\theta$  (d'après les figures 5.18 et 5.22). On peut aussi souligner le fait que la rhéologie de KRIEGER et DOUGHERTY suit la relation d'EINSTEIN (pour  $\phi \ll 1$ ). Donc la viscosité apparente de la phase de mélange suit la relation d'EINSTEIN, et ce quelque soit les valeurs de  $\theta$  et  $Re_p$ , alors que la phase fluide ne la suit pas. On peut donc en déduire qu'ici la contribution des contacts entre grains n'est pas négligeable, même pour  $\phi \ll 1$ .

Notons que si l'on reprend la définition de  $\eta_{eq}^m$  (équation (5.59)) et qu'on utilise les définitions de  $\eta_{eq}^f$  et  $\eta_{eq}^p$  (respectivement données dans les équations (5.48) et (5.58)) pour exprimer les contraintes de cisaillements, on trouve :

$$\eta_{eq}^m = \eta_{eq}^f + \eta_{eq}^p. \quad (5.61)$$

Sous couvert de l'hypothèse faite précédemment pour l'utilisation de la vitesse de mélange dans le calcul de la viscosité apparente, et non celle de la phase considérée, la viscosité apparente de la phase de mélange est la somme des viscosités apparentes de chaque phase. La figure 5.16 montre que  $\eta_{eq}^f$  varie entre 1 et 4.5 fois la viscosité du fluide seul  $\eta_f$ , en fonction de la fraction volumique considérée. Or la viscosité mesurée pour la phase de mélange atteint des valeurs de l'ordre de  $10^3$  fois la viscosité du fluide seul  $\eta_f$  pour des valeurs de  $\phi$  proche de la transition de blocage. La contribution de la phase granulaire à la viscosité apparente du mélange (via des contraintes frictionnelles) est donc prépondérante pour les fortes fractions volumiques, et celle du fluide (via des contraintes visqueuses) devient négligeable lorsque  $\phi$  augmente. C'est justement cette différence d'ordre de grandeur qui rend particulièrement difficile la mesure expérimentale de la viscosité de la phase équivalente fluide. C'est également la raison pour laquelle la contribution de la phase fluide à la viscosité totale est souvent négligée dans les milieux granulaires denses.

#### 5.2.7.4 Article : Un nouveau modèle de viscosité effective de la phase de mélange

On peut noter que la rhéologie de la phase granulaire dépend assez peu des paramètres sans dimension (pour la gamme de paramètres testée), et comme sa contribution est prépondérante, on obtient une rhéologie de la phase de mélange qui dépend, elle aussi, peu des nombres sans dimension. Dans un article qui a été soumis à la revue *Physical Review Fluids*, après une rapide présentation de la méthode reprenant à peu près les premiers chapitres de ce manuscrit de thèse, on a étudié plus en profondeur ces différentes dépendances afin de mettre en place un nouveau modèle de viscosité de la phase de mélange s'appuyant sur les modèles de viscosité des phases fluide et granulaire.



# Effective properties of shear-driven immersed granular flows

Benjamin Fry, Laurent Lacaze, Thomas Bonometti, and François Charru

*Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT),  
Université de Toulouse, CNRS, Toulouse INP, UPS, Toulouse, France.*

(Dated: November 21, 2019)

This paper deals with the modelling of bedload, i.e. granular transport induced by a shear flow and characterized by a granular motion localized close to the upper surface of the granular bed. More particularly, we consider the steady transport of a bed of grains by a laminar Couette flow for a grain-to-fluid density ratio of 2.5, a range of particle Reynolds numbers  $Re_p \in [0.1, 10]$  and Shields numbers  $\theta \in [0.1, 0.7]$ . The main question addressed here concerns the relevance of mesoscale models, for which the granular phase is modeled as a continuum phase, for this specific flow. Numerical simulations are thus performed at the so-called microscale at which individual grain dynamics is resolved, using an Immersed Boundary Method (IBM) coupled to a Discrete Element Method (DEM) granular solver. Up-scaling is then performed to describe the flow at the mesoscale. In particular, this approach allows us to (1) characterize the rheology of the fluid phase, granular phase and equivalent mixture, which are the dominant unknown closure terms at the mesoscale; (2) propose scaling laws as models of the corresponding effective viscosities for the range of  $Re_p$  and  $\theta$  considered here; and (3) highlight the relevance of these models for this very drastic physical configuration for which the separation of scale between the grain and the mesoscopic deformation is not obvious. The main finding of this work is that the apparent rheology of the fluid phases strongly depends on  $Re_p$  and  $\theta$ . On the other hand, the rheology of the granular phase remains dependent on  $Re_p$  and  $\theta$  but to a lesser extent, and is well described by a viscoplastic model of  $\mu - I$  type. Accordingly, a mixture effective viscosity model is proposed based on previous experimental results as the sum of the effective viscosities of these two equivalent phases. This model is shown to predict reasonably well the mixture effective viscosity obtained from the microscale simulations.

## I. INTRODUCTION

Immersed granular transport occurs in many environmental situations and industrial processes, such as sediment transport in rivers and oceans [1, 2], oil extraction, pharmaceutical or food processes [3] to mention but a few. The modeling of granular flows at these scales imposes a minimum scale of resolution which is greater than the grain size. For this reason, the granular phase is usually modeled as a continuum phase.

Yet, modeling immersed granular flows at a scale large enough so the granular medium can be viewed as a continuum (denoted meso-scale hereafter) remains a challenging task [4]. On the one hand, two-phase Eulerian models such as those developed by R. Jackson [5, 6] suffer from the lack of accurate and robust closure models [see e.g. Ref. 7]. In particular, the apparent rheological behaviour of the various phases (fluid, granular, mixture) still raises some open questions. On the other hand, the validity of this mesoscale description usually requires a clear separation between the grain size and the macroscopic scale of deformation of the granular material. This assumption can be drastic for localized shear and sharp interface as for instance when a bed of grains is sheared and transported by a fluid flow as encountered in sediment transport. The strategy to adopt to model the granular phase then remains uncertain.

In the viscous limit, the effective fluid phase at a scale larger than the grains is usually described as an equivalent fluid whose effective viscosity is a function of the particle concentration. This allows to recover well-known results of the effective viscosity at low particle concentra-

tion [8–10]. The apparent viscosity of the fluid phase at larger particle concentration is approximated by semi-empirical relations [11]. The influence of inertia on these models remains an open-question. As for the granular phase, several rheological models have been proposed. Recent advances on the understanding of dense granular flows have led to some rheological models for suspensions [12, 13]. Finally, the rheology of the mixture is generally modeled by the Krieger and Dougherty (1959)’s correlation [14]. More recently, a mixture model has been proposed following recent developments on the rheology of dense granular medium [12]. All these models need to be assessed for a wider range of granular flows, including bedload sediment transport, for which the mesoscale description can suffer grain size effects as mentioned previously. Yet, recent promising works have shown the pertinence of large-scale granular rheological model even for this drastic configuration [15]. This has to be extended to the whole fluid and mixture description. For this purpose, numerical simulations resolved at the grain scales are required to extract the pertinent model at the mesoscale.

Here, we consider the generic problem of bedload sediment transport of a bed of grains, induced by some viscous shear flow. The problem is sketched in Figure 1(a). A bed of grains of mean diameter  $d$  and density  $\rho_p$  is subjected to a Couette flow with shear rate  $\dot{\gamma}$ , in a fluid of density  $\rho_f$  and viscosity  $\eta_f$ . The present problem depends on three dimensionless parameters, namely the density ratio  $r = \rho_p/\rho_f$ , the particle Reynolds number  $Re_p = \rho_f \dot{\gamma} d^2 / \eta_f$  and the Shields number  $\theta = \eta_f \dot{\gamma} / (\Delta \rho g d)$ , where  $\Delta \rho = \rho_p - \rho_f$  and  $g$  is the

gravitational acceleration. These numbers characterize the local dynamics at the grain scale, they are thus based on the particle diameter  $d$  as the characteristic length scale and  $\dot{\gamma}$  as the inverse time scale.

In the present work, we perform three-dimensional ‘fully-resolved’ simulations of this problem using an immersed boundary method (IBM) [16, 17] coupled to a granular solver [18] based on a discrete element method (DEM) [19]. We refer to ‘fully-resolved’ simulations because almost all the scales of the flow are resolved (except some part of the lubrication effects below the fluid mesh resolution). By temporally and spatially averaging these results, we can compute the flow properties at the mesoscale, which only depend on the vertical direction.

The motivations of the present work are twofold: (1) to compute all the terms of the Eulerian two-phase equations and propose some parameterization of the closure terms; (2) to assess the existing rheological models of the various phases in the generic case of bedload transport.

The paper first presents the IBM-DEM numerical approach and setup used for computing the flow at the microscale. In section III, we describe some theoretical background, namely the upscaling procedure giving the Eulerian equations at the mesoscale and rheological models for the various phases. In section IV, spatial and temporal averaging is performed and the flow properties and rheology at the mesoscale are obtained for each phase. Finally, the influence of the particle Reynolds number and Shields number on the mesoscale behaviour is discussed.

## II. GOVERNING EQUATIONS AND NUMERICAL SETUP

### A. Fluid solver

The fluid solver is the in-house code JADIM based on an immersed boundary method (IBM) for computing the fluid flow around moving particles on a fixed Cartesian grid [16–18, 21]. Note that the present IBM method is of the body-force type similar to that of [22]. Assuming an incompressible Newtonian fluid of density  $\rho_f$  and dynamic viscosity  $\eta_f$ , the flow evolution is described by,

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{g} - \frac{1}{\rho_f} \nabla P + \frac{1}{\rho_f} \nabla \cdot [\eta_f (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] + \mathbf{f}_{\text{IBM}}, \quad (2)$$

where  $\mathbf{u}$  and  $P$  denote the local velocity and pressure, respectively,  $\mathbf{g}$  is the gravitational acceleration and  $\mathbf{f}_{\text{IBM}}$  is a volume force term used to account for the presence

of solid particles in the domain, as will be explained in the following.

The present approach is based on a finite-volume method with a three steps mixed third-order Runge-Kutta/Crank-Nicolson scheme. Pressure is solved using a projection method [23]. Domain decomposition and Message Passing Interface parallelization is performed.

(1)-(2) are resolved in the whole domain, in fluid cells but also in cells containing the solid particles. As the boundary location of the moving spheres almost never coincide with the mesh, so-called local solid volume fraction  $\alpha_{\text{IBM}}$  is introduced to materialize the particles.  $\alpha_{\text{IBM}}$  is equal to one in cells filled with solid, zero in cells filled with fluid, and in the boundary region  $\alpha_{\text{IBM}}$  is varying with a sinusoidal shape from one to zero. The characteristic length  $\Delta_\alpha$  of the transition is typically of the order of one to three mesh cells of size  $\Delta x$ . In the present work,  $\Delta_\alpha = 1.3\Delta x$  [16, 22].

The body force term  $\mathbf{f}_{\text{IBM}}$  is then defined as

$$\mathbf{f}_{\text{IBM}} = \alpha_{\text{IBM}} \frac{\mathbf{U}_d - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t}, \quad (3)$$

where  $\Delta t$  is the numerical time step,  $\tilde{\mathbf{u}}$  is a predictor fluid velocity and  $\mathbf{U}_d$  is a prescribed particle velocity.  $\mathbf{f}_{\text{IBM}}$  basically ensures the velocity to be the actual particle velocity within solid particles. Ikeno and Kajishima (2007) [24] showed that using the local particle velocity as the prescribed velocity, namely  $\mathbf{U}_d = \mathbf{u}_p + \omega_p \times \mathbf{r}$  may tend to overestimate boundary layer effects (hence the drag on the body) in the fluid region near the particle surface. To reduce this effect, we impose  $\mathbf{U}_d = \alpha_{\text{IBM}}(\mathbf{u}_p + \omega_p \times \mathbf{r}) + (1 - \alpha_{\text{IBM}})\mathbf{U}_I$ , as done by these authors and Pierson (2015) [21], where  $\mathbf{U}_I$  is a local fluid velocity resulting from a multidirectional linear interpolation of  $\tilde{\mathbf{u}}$  over the neighbouring cells.

A sub-loop on the entire forcing/Crank-Nicolson step is performed in order to improve the enforcement of the no-slip condition at the particle boundary [see Refs 17, 21, for more details]. More specifically,  $\tilde{\mathbf{u}}$  is first computed without considering the particles, then the IBM force is computed, thirdly an unsteady Stokes equation is solved and finally  $\tilde{\mathbf{u}}$  is updated. This forcing sub-loop is computationally expensive and is therefore used only twice per Runge-Kutta loop (tests showed that using more sub-loops did not improve the results significantly).

### B. Granular solver

The granular solver is the in-house code GraDyM [18] based on a soft-sphere discrete element method (DEM) which allows to describe multicontact grains interaction [19, 25, 26]. It solves the Newton’s equations for linear and angular momentum, with velocity  $\mathbf{u}_p$  and angular velocity  $\omega_p$ , which read

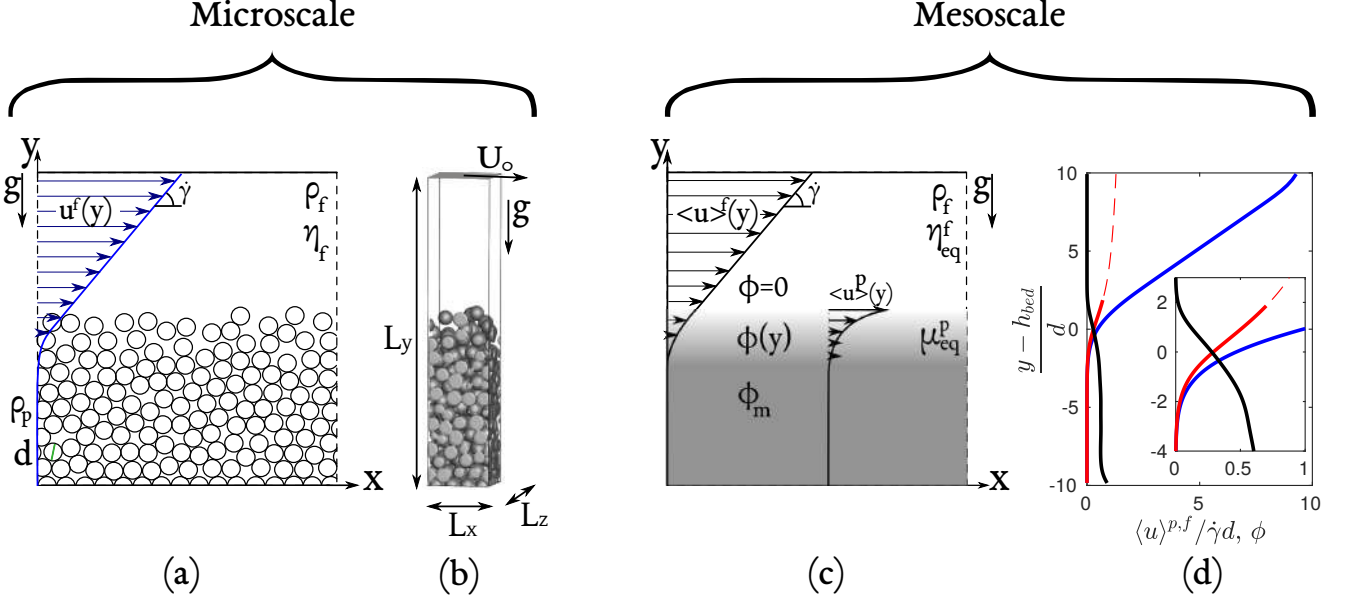


FIG. 1. (a): Scheme of the considered problem at the microscale. (b): Domain of simulation. (c): Scheme of the considered problem at the mesoscale. (d): Vertical profile of the streamwise velocity in the fluid phase (blue,  $\langle u \rangle^f$ ), the granular phase (red,  $\langle u \rangle^p$ ) and solid volume fraction (black,  $\phi$ ) for  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$ . Note that the velocity profile of the granular phase is represented with a solid line for  $\phi \geq 0.025$  and with a dashed line otherwise. Here, we use a characteristic length of the weighting function  $h_g = d$ .  $h_{bed}$  is the mean height of the granular bed defined as the barycentre of the local granular flow rate  $h_{bed} = \int y dq / \int dq = \int y \phi u_p dy / \int \phi u_p dy$  as suggested by Durán et al. (2012) [20].

$$\rho_p V_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \rho_p V_p \mathbf{g} + \mathbf{f}_h + \sum_{q \neq p} \mathbf{f}_c^{pq}, \quad (4)$$

$$\mathbf{I}_p \frac{d\boldsymbol{\omega}_p}{dt} = \boldsymbol{\Gamma}_h + \sum_{q \neq p} \boldsymbol{\Gamma}_c^{pq}, \quad (5)$$

where  $V_p = \pi d^3/6$  is the volume of particle  $p$ ,  $\mathbf{I}_p$  is the moment of inertia tensor,  $\sum_{q \neq p} \mathbf{f}_c^{pq}$  ( $\sum_{q \neq p} \boldsymbol{\Gamma}_c^{pq}$ ) is the total contact force (torque) induced by particles  $q$  in contact with the particle  $p$  and  $\mathbf{f}_h$  ( $\boldsymbol{\Gamma}_h$ ) is the total hydrodynamic force (torque) acting on the particle.

The contact force and torque  $\mathbf{f}_c$  and  $\boldsymbol{\Gamma}_c$ , are computed using a soft-sphere model where the particles are allowed to slightly overlap, with a linear mass-spring model with dissipation in the normal direction and a mass-spring model coupled to a Coulomb type behaviour above the slip threshold.

This model introduces four new dimensionless parameters, namely the dry restitution coefficient  $e$ , the characteristic contact time  $\gamma t_{col}$  which are both related to dissipation during bouncing and contact stiffness; the ratio between the normal and tangential stiffnesses  $k_t/k_n$  and the friction coefficient  $\mu$  used for the Coulomb threshold. We choose a dry restitution coefficient of  $e = 0.7$ , a collision time small enough to ensure rigid behaviour of the particles and loose dependency with this parameter

[27, 28], typically  $t_{col} \leq 10^{-3} \sqrt{d/g}$ ; here  $k_t/k_n = 0.2857$  as suggested by Schafer et al. (1996) [25] and  $\mu = 0.25$ .

The hydrodynamic force and torque  $\mathbf{f}_h$  and  $\boldsymbol{\Gamma}_h$  acting on each particle are computed using  $\mathbf{f}_{IBM}$  as

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_h &= \int_{S_p} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \rho_f \left[ - \int_{V_p} \mathbf{f}_{IBM} d\nu + \frac{d}{dt} \left( \int_{V_p} \mathbf{u} d\nu \right) - V_p \mathbf{g} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_h = \rho_f \left[ - \int_{V_p} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_{IBM} d\nu + \frac{d}{dt} \int_{V_p} \mathbf{r} \times \mathbf{u} d\nu \right], \quad (7)$$

where  $S_p$  is the surface of particle  $p$ ,  $\boldsymbol{\tau} = -P\mathbf{I} + \eta_f (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T)$  is the local hydrodynamic stress tensor,  $\mathbf{f}_{IBM}$  is the body-force source term used in the fluid solver to impose the local particle velocity at the particle location.

Equations (4)-(5) are solved using the third-order Gear's predictor-corrector scheme [27, 29–31]. The time step for the time advancement of the procedure is set to  $\Delta t_{DEM} = t_{col}/50$ .

The reader is referred to [16, 17] for a validation of the present immersed boundary method without any contact, and [32, 33] for validations in the case where contacts are present.

### C. Numerical setup

In the present work, we set the particle-to-fluid density ratio to  $r = 2.5$ , we vary the Shields number in the range  $0.1 \leq \theta \leq 0.7$  and the particle Reynolds number in the range  $0.1 \leq Re_p \leq 10$ . Most of the explored values of  $\theta$  are above the transport threshold and below the threshold of suspension initiation; hence the granular bed is moving as bedload. As the particle Reynolds numbers is lower than 10, this study may be considered as relevant for all the situations where the bed-load layer lies within the viscous sub-layer of turbulent flows.

The flow configuration is sketched in Figure 1(a). We define the cartesian frame axes  $(x, y, z)$  such as the  $x$  and  $z$  axes lie in the horizontal plane (perpendicular to gravity),  $x$  being aligned with the imposed fluid flow velocity, and  $y$  is the vertical direction. The simulations are performed in a  $L_x \times L_y \times L_z = 4d \times 20d \times 4d$  computational domain. In addition, we set the spatial resolution of the fluid solver to  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0.1d$ . Periodic boundary conditions are imposed along the horizontal  $x$  and  $z$  directions. Note that we verified that varying the size of the domain and spatial resolution did not change the results significantly (see appendix A for more details). The bottom of the domain, of size  $L_x \times L_z = 4d \times 4d$ , consists in a rough wall composed of a network of fixed half-grains. Moreover, we benefit from the steadiness of the flow to extract converged average quantities of the granular phase for such a small extension of the spatial domain. Half of the domain is initially filled with  $N_p = 170$  grains. The particles have a mean diameter  $d$  with a dispersion of 5% around the mean value to avoid crystallization and segregation phenomena. The speed at the top of the domain is imposed as  $\dot{\gamma}L_y/2$  (where  $L_y/2$  is the fluid thickness), or equivalently  $L_y/2d = 10$  in its dimensionless form. Then the bulk Reynolds number of the fluid phase  $Re_B = \rho_f \dot{\gamma} L_y^2 / 8\eta_f \equiv 50Re_p \in [5, 500]$ , confirming the laminar state of the fluid phase flow.

The initial state of the simulation is obtained as follows. First we let the particles settle down without any interstitial fluid (i.e. using the GraDyM code only in the dry configuration). Second, we fix the particles (the granular bed thus becomes a porous medium) and simulate the Couette flow until a steady-state is reached (i.e. using the JADIM code only). Finally, at  $t = 0$ , the grains are released and become free to move and rotate.

The physical duration of a run is then about  $1300\dot{\gamma}^{-1}$  including a transient regime of about  $200\dot{\gamma}^{-1}$  prior a quasi steady-state of the fluid-particle flow is reached. As an example, figure 2 presents the instantaneous dimensionless granular flow rate  $q/V_s d$ , with  $V_s$  the Stokes velocity of a settling particle as defined in the caption of figure 2, for  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$ . To ensure statistical convergence, we compute the cumulative time averaging of the considered quantity by starting from the end of the simulation (corresponding to a time denoted  $t_{max}$ ).

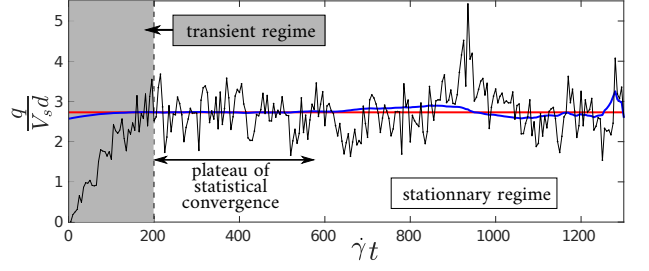


FIG. 2. (Colour online) Time evolution of the instantaneous granular flow rate per unit depth scaled by  $V_s$  with  $V_s = (\rho_p - \rho_f)gd^2/(18\eta_f)$  the Stokes velocity ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ). Black line: IBM-DEM results. Red line: mean value at steady state. Blue line:  $f_{conv}$  defined in (8) used to check time convergence (here,  $t_{max} = 1300\dot{\gamma}^{-1}$ ).

In particular, we define  $f_{conv}$  for an arbitrary time dependent quantity  $f$ , as

$$f_{conv}(t) = \frac{1}{t_{max} - t} \int_t^{t_{max}} f(\tau) d\tau. \quad (8)$$

For instance,  $q_{conv}/V_s d$  is shown in figure 2 (solid blue line). Starting from  $t_{max}$ , the function converge to a mean value as  $t$  decreases. Note that the convergence should disappear when  $t \rightarrow 0$  as the initial transient regime is then included in the integral of (8). Therefore, we can consider that the statistical convergence is reached when a plateau is observed on a significant interval of time  $t$ . The statistical convergence as defined previously is shown for the granular flow rate  $q_{conv}$  in figure 2. The plateau of its statical convergence is pointed out on a time interval of about  $400\dot{\gamma}^{-1}$ , starting at  $600\dot{\gamma}^{-1}$  and ending at  $200\dot{\gamma}^{-1}$ . In our case, as  $t_{max} = 1300\dot{\gamma}^{-1}$ , we thus use about 150 samples separated by a time laps of  $5\dot{\gamma}t$  to perform the temporal averaging, i.e. on a time interval  $[550\dot{\gamma}^{-1}, t_{max}]$ .

## III. THEORETICAL BACKGROUND

### A. Eulerian two-phase equations

In order to obtain the mesoscopic mass and momentum equations from the microscopic (particle size) ones, Jackson proposed a spatial averaging procedure which is summarized below. The reader is referred to Jackson (1997,2000) [5, 6] for more details. Starting with, this averaging procedure allows to define the local volume fraction of the fluid phase  $\epsilon(\mathbf{x})$  and the solid phase  $\phi(\mathbf{x})$  on a length scale defined through a spatial averaging -or weighting- function  $\mathcal{G}$ , such as

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \int_{V_f} \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dv_{\mathbf{y}}, \quad (9)$$

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_p \int_{V_p} \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dv_{\mathbf{y}}, \quad (10)$$

where  $\mathbf{x}$  is the local position in the domain,  $V_p$  is the volume of the particle  $p$  and  $V_f$  the volume filled with fluid. Note that moreover  $\epsilon + \phi = 1$ . To be consistent,  $\mathcal{G}$  has to be defined as a decreasing function from the considered cell position  $\mathbf{x}$  with a characteristic spatial extension  $h_g$ , normalized ( $\int_{V_{tot}} \mathcal{G} dv = 1$ ) and differentiable. We choose here

$$\mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \frac{1}{L_x L_z} \frac{e^{-\left(\frac{y - y'}{h_g}\right)^2}}{\int_0^{L_y} e^{-\left(\frac{y - y''}{h_g}\right)^2} dy''}, \quad (11)$$

where  $\mathbf{x} = (x, y, z)^T$ ,  $\mathbf{x}' = (x', y', z')^T$  and  $h_g$  is the characteristic length of the averaging volume. This weighting function is invariant in the horizontal directions, as the flow is in these directions, and is Gaussian in the vertical direction.

An example of the vertical profile of the steady solid volume fraction  $\phi(y)$  obtained in the present configuration of a sheared granular bed for  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$  is shown in figure 1(d) (black line). Here  $h_g = d$  has been chosen as the characteristic length scale of the weight function (11). As expected, one observes that  $\phi$  is close to its maximum packing fraction  $\approx 0.6$  in a static region close to the bottom and rapidly decreases close to its upper surface to reach zero in top fluid layer. The vertical variation of  $\phi$  depends on the dynamics of the moving layer which will be discussed later on in this section.

Assuming that the grains are rigid, we compute the number of particles per unit volume  $n(\mathbf{x})$  at location  $\mathbf{x}$  as

$$n(\mathbf{x}) = \sum_p \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|), \quad (12)$$

where  $\mathbf{x}^p$  is the center location of particle  $p$ . Note that assuming  $\mathbf{x} - \mathbf{x}^p \ll h_g$  in (10) in each particle volume, implying  $d/2 \ll h_g$ , and developing  $\mathcal{G}$  in Taylor series at  $\mathbf{x}^p$ , we obtain the following relation between  $\phi$  and  $n$

$$\phi(\mathbf{x}) = V_p n(\mathbf{x}) + \mathcal{O}\left(\left(\frac{d}{2h_g}\right)^2\right). \quad (13)$$

Note that the above-mentioned condition  $d/2 \ll h_g$  is the first condition of scale separation necessary for the validity of the up-scaling approach. As a second condition, the characteristic spatial extension  $h_g$  of the weighting function  $\mathcal{G}$  must be much smaller than the macroscopic scale  $L$ , namely  $h_g \ll L$ . The latter condition can be

seen as preventing unexpected smoothing of flow properties gradients at the mesoscale.

The fluid phase average  $\langle f \rangle^f$  of an arbitrary quantity  $f$  obtained from the IBM solver is then defined as

$$\langle f \rangle^f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon(\mathbf{x})} \int_{V_f} (1 - \alpha_{\text{IBM}}(\mathbf{y})) f(\mathbf{y}) \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) dv_{\mathbf{y}}. \quad (14)$$

As for the granular phase, one may define two types of averages, namely the *particle phase average* (which uses  $n$ ) and the *solid phase average* (which uses  $\phi$ ) [5]. For simplicity, we only present the particle phase average. In the following, we refer indifferently to the "solid" or "particulate" quantities under the adjective "granular". Then, the particle phase average  $\langle f \rangle^p$  of an arbitrary quantity  $f^p$  of particle  $p$  is defined by

$$\langle f \rangle^p(\mathbf{x}) = \frac{1}{n(\mathbf{x})} \sum_p f^p \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|). \quad (15)$$

For example, figure 1(d) shows the vertical profiles of the streamwise steady fluid velocity  $\langle u_x \rangle^f(y)$  (blue line) and the streamwise steady granular velocity  $\langle u_{p|x} \rangle^f(y)$  (red line) obtained for  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$ . Again,  $h_g = d$  has been chosen as the characteristic length scale of the weight function (11). The fluid phase is shown to be everywhere moving faster than the granular, as it is expected for such a fluid-driven transport configuration. Moreover, velocity profiles rapidly decreases in the moving layer to reach zero simultaneously with the volume fraction reaching its maximum packing fraction in the static layer.

Let us now apply these averages to the equations solved at the microscale, namely (2) and (4) (see section II for a description of the system solved at the microscale). This leads to the mesoscopic system of equations verified by the mesoscopic quantities. The momentum equation for the fluid phase and the granular phase at the order  $\mathcal{O}((d/L)^2)$  read, respectively,

$$\rho_f \epsilon \frac{D_f \langle \mathbf{u} \rangle^f}{Dt} = \nabla \cdot \Sigma^f - \phi \nabla \cdot \Sigma^f - n \langle \mathbf{f}_1 \rangle^p + \rho_f \epsilon \mathbf{g}, \quad (16)$$

$$\rho_p \phi \frac{D_p \langle \mathbf{u}_p \rangle^p}{Dt} = \nabla \cdot \Sigma^p + \phi \nabla \cdot \Sigma^f + n \langle \mathbf{f}_1 \rangle^p + \rho_p \phi \mathbf{g}. \quad (17)$$

where  $D_X(\cdot)/Dt = \partial(\cdot)/\partial t + \langle \mathbf{u} \rangle^X \cdot \nabla(\cdot)$ ,  $\Sigma^f$  and  $\Sigma^p$  are the apparent stress tensor of the equivalent fluid phase and granular phase, respectively. The term  $-\phi \nabla \cdot \Sigma^f$  is the so-called generalized buoyancy and  $n \langle \mathbf{f}_1 \rangle^p = n \langle \mathbf{f}_h \rangle^p - \phi \nabla \cdot \Sigma^f$  is the averaged hydrodynamic interaction between the particles and the fluid. These terms can be expressed as

$$n(\mathbf{x}) \langle \mathbf{f}_h \rangle^p(\mathbf{x}) = \sum_p \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \int_{S_p} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (18)$$

$$\Sigma^f = \epsilon \langle \tau \rangle^f + n \langle \mathbf{s}^f \rangle^p - \rho_f \epsilon \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle^f, \quad (19)$$

$$\Sigma^p = n \langle \mathbf{s}^s \rangle^p - \rho_p \phi \langle \mathbf{u}'_p \otimes \mathbf{u}'_p \rangle^p, \quad (20)$$

where  $\tau$  is the local fluid stress tensor,  $\mathbf{u}' = (1 - \alpha_{\text{IBM}}(\mathbf{y})) \mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle^f$  (resp.  $\mathbf{u}'_p = \mathbf{u}_p - \langle \mathbf{u}_p \rangle^p$ ) is the spatially fluctuating part of the local fluid (resp. granular) velocity and the tensors  $\langle \mathbf{s}^f \rangle^p$  and  $\langle \mathbf{s}^s \rangle^p$  read

$$\begin{aligned} n \langle \mathbf{s}^f \rangle^p &= \frac{d}{2} \sum_p \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \int_{S_p} (\tau \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} dS \\ &= \frac{d}{2} \sum_p \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \times \\ &\quad \int_{V_p} \left( \tau + \rho_f \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{f}_{\text{IBM}} \right) \otimes \mathbf{r} \right) dv, \end{aligned} \quad (21)$$

$$n \langle \mathbf{s}^s \rangle^p = \frac{d}{2} \sum_p \mathcal{G}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}^p|) \sum_{q \neq p} \mathbf{f}_c^{pq} \otimes \mathbf{n}^{pq}, \quad (22)$$

where  $\mathbf{n}^{pq} = (\mathbf{x}^q - \mathbf{x}^p) / (|\mathbf{x}^q - \mathbf{x}^p|)$  is the unit outward vector normal to the surface of the particle  $p$  at the contact point.

### B. Eulerian equations for the mixture

In the previous section, up-scaling has been performed in a way that both the fluid phase and the granular phase remain separate. One may also represent the system by a single equivalent phase that contains both the fluid and the grains. This phase is here called the mixture phase and its velocity is defined as

$$\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle^m = \rho_p \phi \langle \mathbf{u}_p \rangle^s + \rho_f \epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f, \quad (23)$$

where  $\bar{\rho} = \phi \rho_p + \epsilon \rho_f$  is the local density of the mixture. Using (16), (17), (23) and mass continuity, one can show that the momentum equation for the mixture phase reads [5]

$$\bar{\rho} \frac{D_m \langle \mathbf{u} \rangle^m}{Dt} = \nabla \cdot \Sigma^{tot} + \bar{\rho} \mathbf{g}, \quad (24)$$

where  $\Sigma^{tot} = \Sigma^p + \Sigma^f$  is the total apparent stress. Here, the only needed closure model is one for the apparent rheology of the mixture.

### C. Constitutive laws for the various phases (fluid, granular, mixture)

In this section, we present the rheological models that we will use to characterize the dynamics of the phases.

Let us first consider the mixture phase. At low particle concentration (and zero particle Reynolds number), Einstein [8, 9] showed that the apparent viscosity of the mixture in the presence of a dilute suspension is

$$\eta_{eq}^m / \eta_f = 1 + \frac{5}{2} \phi. \quad (25)$$

Batchelor and Green (1972) [10] made the second-order development which extends the range of applicability of the model to larger particle concentrations (typically  $\phi \leq 0.1$ ). For a shear flow, their model reads

$$\eta_{eq}^m / \eta_f = 1 + \frac{5}{2} \phi + 7.6 \phi^2. \quad (26)$$

For a dense and neutrally buoyant suspension, its effective viscosity is classically modeled by the empirical correlation of Krieger and Dougherty (1959) [34]

$$\frac{\eta_{eq}^m}{\eta_f} = \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_m} \right)^{-\frac{5}{2} \phi_m}, \quad (27)$$

with  $\phi_m = 0.62$ . This correlation provide a good approximation but it does not allow to separate the different contributions to the dissipation in the system (viscosity of the fluid, solid frictional contacts).

In order to understand and theorize the rheology of dense suspensions, the contributions of fluid and particles to momentum transfert have been separated. Boyer, Guazzelli and Pouliquen (2011) [12] focused on the rheology of neutrally buoyant suspension but with an imposed pressure on the particle phase as appearing for immersed heavy granular material. They proposed constitutive laws which unify suspension and granular rheology, modeled as the sum of two contributions, coming from hydrodynamic stresses and contact

$$\eta_{eq}^m = \eta_{eq}^f + \eta_{eq}^p, \quad (28)$$

where  $\eta_{eq}^f$  and  $\eta_{eq}^p$  are respectively the fluid and granular contributions.

Let us now consider the apparent rheology of the fluid phase. At low concentration, the contribution of the contacts vanish and then, the apparent rheology of the fluid phase equals the one of the mixture. At larger particle concentrations and non-zero particle Reynolds numbers, Gibilaro et al. (2007) [11] propose an empirical expression of the apparent viscosity of the fluid phase

$$\eta_{eq}^f / \eta_f = \epsilon^{-\beta} = (1 - \phi)^{-\beta}, \quad (29)$$

with  $\beta = 2.8$ .

Let us finally consider the apparent rheology of the granular phase. According to the present configuration, we focus here on rheological models dealing with dense

granular flows. In particular, we make use of the popular  $\mu - \mathcal{I}$  rheology which has been extensively developed in the last decade. Trulsson et al. (2012) [13] extended the so-called  $\mu(\mathcal{I})$ -rheology proposed for dry granular flows by the GDRMidi (2004) [35] [see also 27, 36, for more details] by using both the inertial number

$$\mathcal{I} = \frac{|\dot{\gamma}|d}{\sqrt{P^p/\rho_p}} \quad (30)$$

and the viscous number [12, 37]

$$\mathcal{J} = \frac{|\dot{\gamma}|\eta_f}{P_g} \quad (31)$$

in their model. This leads to a new dimensionless number

$$\mathcal{K} = \mathcal{J} + \alpha\mathcal{I}^2, \quad (32)$$

where  $\alpha$  is some constant of order unity. This is promising to reunify rheological models obtained in viscous ( $\mathcal{J}$ ) and inertial ( $\mathcal{I}$ ) configurations, including the transition from one regime to the other. Trulsson et al. (2012) [13] obtained a value of  $\alpha = 0.635$  from two-dimensional Euler-Lagrange simulations. Note that Lacaze et al. [38] recently performed fully-resolved three-dimensional simulations of the collapse of a granular column in a viscous fluid which seems to support the present value of  $\alpha$ .

In Trulsson's empirical model, following previous results from dry configurations, the granular shear stress, say  $\Sigma_{xy}^p$ , is proportional to the granular pressure  $P^p$  via an effective friction coefficient  $\mu_{eq}^p$  which depends on  $\mathcal{K}$ , and so is  $\phi$ , namely,

$$\phi(\mathcal{K}) = \frac{\phi_c}{1 + \mathcal{K}^{1/2}}, \quad (33)$$

$$\Sigma_{xy}^p = \mu_{eq}^p(\mathcal{K})P^p, \quad (34)$$

$$\mu_{eq}^p(\mathcal{K}) = \mu_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{1 + (\frac{\mathcal{K}_0}{\mathcal{K}})^{1/2}}, \quad (35)$$

where  $\phi_c$  is the jamming volume fraction, and  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  and  $\mathcal{K}_0$  are fitting parameters. Trulsson et al. found  $\mu_1 \approx 0.277$ ,  $\mu_2 \approx 0.85$  and  $\sqrt{\mathcal{K}_0} \approx 0.29$  from two-dimensional Euler-Lagrange simulations.

#### IV. RESULTS

The results presented in this section were obtained by applying the up-scaling procedure described in section III A. In particular, we use as characteristic length of the weighting function  $h_g = d$  as was used for volume fraction and velocities profile in figure 1(d). Other values were tested (especially smaller ones) and some results

with  $h_g \neq d$  are presented in appendix B. The value of  $h_g$  can be crucial in the present configuration. In particular, larger values of  $h_g$  could be chosen to satisfy the condition  $h_g \ll d/2$ . However, figure 18 shows that increasing  $h_g$  tends to underestimate the mesoscale granular velocity close to the granular bed surface. This can lead to an overestimation of the velocity difference, and then the drag, between the two phases. On the other hand, decreasing  $h_g$ , even below  $d/2$  allows these profiles to converge. Nevertheless, strong oscillations of the volume fraction profiles, and actually of other mesoscopic quantities, are observed in the bed with an increase of their amplitude when reaching the static bed. This highlights the required condition  $h_g \ll d/2$  which allows to smooth mesoscopic quantities over a significant spatial scale compared to the microscale. These two opposing observations confirm the above mention limitation of mesoscale description for such locally sheared dense granular bed characterized by a sharp interface. We thus choose in the following to use and discuss main results for  $h_g = d$  for sake of clarity, but we will pay attention to discuss its influence according to the results shown in appendix B.

In the following, we discuss results according to the different phases, from the equivalent fluid phase to the equivalent granular phase and to finish with the equivalent mixture phase. We will first pay attention to discuss the relevance of the mesoscale description for bedload configuration. This is done by verifying that the required balances of the momentum equations (16) and (17) are actually satisfied in the present configuration when up-scaling from the microscale simulations. At the same time, this allows to highlight the influence of the different contributions in the momentum balance and thus to described the physics of bedload transport. The rheology of each phase, required for closure term at the mesoscale, will then be presented and discussed.

##### A. Momentum balance at the mesoscale description

###### 1. Equivalent fluid phase

All the results presented in this section are for  $\theta = 0.67$  and  $Re_p = 1$ . Let us consider the vertical momentum balance of the equivalent fluid phase (see eq. (16)),

$$\underbrace{\rho_f \epsilon \langle u_y \rangle^f}_{(1)} \frac{\partial \langle u_y \rangle^f}{\partial y} = \underbrace{\epsilon \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y}}_{(2)} - \underbrace{n \langle f_1 \rangle_y^p}_{(3)} + \underbrace{\rho_f \epsilon g}_{(4)}, \quad (36)$$

with

$$\Sigma_{yy}^f = \underbrace{\epsilon \langle \sigma_{yy} \rangle^f}_{(a)} + \underbrace{n \langle s_{yy}^f \rangle^p}_{(b)} - \underbrace{\rho_f \epsilon \langle v'^2 \rangle^f}_{(d)}. \quad (37)$$

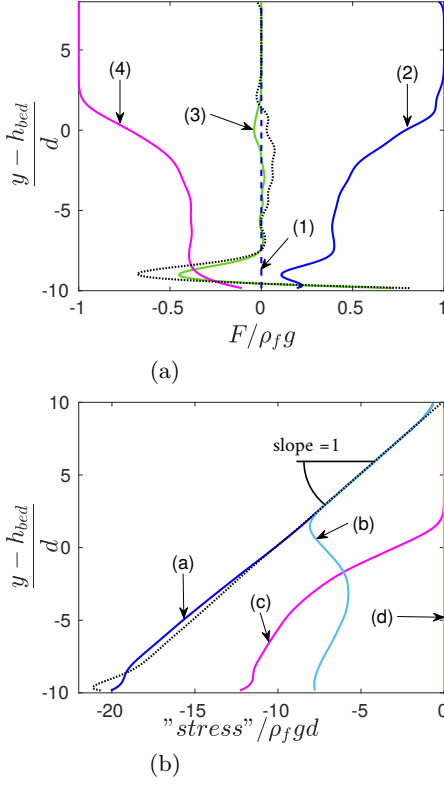


FIG. 3. (a) Vertical distribution of all the terms of the momentum balance (36) of the equivalent fluid phase in the vertical direction ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ): advection (dashed blue); divergence of normal stress (solid blue); fluid-grain interaction - lift force (green); weight (magenta). The black dotted line corresponds to the ‘error’ of the up-scaling procedure (sum of all the terms of (36)). (b) Vertical distribution of the normal stress  $\Sigma_{yy}^f$  (blue) and its three contributions given in (37), namely  $\epsilon\langle\sigma_{yy}\rangle^f$  (cyan);  $n\langle s_{yy}^f \rangle^p$  (magenta);  $-\rho_f \epsilon\langle v'^2 \rangle^f$  (yellow). The black dotted line is  $\Sigma_{yy}^f$  obtained by vertically integrating (36), indicating the cumulative up-scaling error.

The vertical distribution of the terms of (36) is presented in figure 3(a). The difference between the right hand side and the left hand side of all the terms of (36) is also plotted as an estimation of the local up-scaling error.

It appears first that the inertial term is negligible for the present set of dimensionless parameters. In addition, the magnitude of the lift force exerted on the granular phase (green) is of the same order as the error of the up-scaling method (black dotted). Here, the maximum value of the mean lift force is about  $0.04 \rho_f g$ , which is about 20% of the maximum value of the mean drag force. Two terms are significant in (36), the buoyancy force and the weight of the fluid and they evolve as the fluid volume fraction  $\epsilon$ .

The error balance in (36) is reasonably small, i.e. with a maximum of 7.3% of  $\rho_f g$ , everywhere except close to

the bottom rough wall where it becomes significant. Due to the fact that below the weighting function is influenced by the presence of the rough wall.

Figure 3(b) presents the vertical distribution of the normal stress  $\Sigma_{yy}^f$  and its three contributions given in (37), namely the fluid phase normal stress  $\epsilon\langle\sigma_{yy}\rangle^f$ , the contribution of the grains to the fluid normal stress  $n\langle s_{yy}^f \rangle^p$  and the Reynolds stress term  $-\rho_f \epsilon\langle v'^2 \rangle^f$ . Here,  $-\rho_f \epsilon\langle v'^2 \rangle^f$  is negligible. As expected,  $n\langle s_{yy}^f \rangle^p$  is zero above the bed of grains and increases (in absolute value) as one goes deeper in the bed. Alternatively,  $\epsilon\langle\sigma_{yy}\rangle^f$  linearly increases in the pure fluid column down to the surface of the bed of grain. Just below the bed surface,  $\epsilon\langle\sigma_{yy}\rangle^f$  suddenly decreases in the moving layer to start increasing again when reaching the static bed. The distribution of the sum ( $\epsilon\langle\sigma_{yy}\rangle^f + n\langle s_{yy}^f \rangle^p$ ) is almost linear and indicates hydrostatic balance with a slope  $\rho_f g$ .

Here, the maximum error balance is about 3.6% close to the fixed rough wall (this error is reduced if we increase the size of the computational domain or if we increase the spatial resolution, as shown in appendix A).

Let us now consider the momentum balance of the equivalent fluid phase in the streamwise direction. For the present flow configuration, the projection of (16) along the  $x$  axis reads

$$\underbrace{\rho_f \epsilon \langle u_y \rangle^f}_{(1)} \frac{\partial \langle u_x \rangle^f}{\partial y} = \underbrace{\epsilon \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y}}_{(2)} - \underbrace{n \langle f_1 \rangle_x^p}_{(3)}, \quad (38)$$

with

$$\underbrace{\Sigma_{xy}^f}_{(a)} = \underbrace{\epsilon \langle \sigma_{xy} \rangle^f}_{(b)} + \underbrace{n \langle s_{xy}^f \rangle^p}_{(c)} - \underbrace{\rho_f \epsilon \langle u' v' \rangle^f}_{(d)}. \quad (39)$$

The vertical distribution of the terms of (38) is presented in figure 4(a). As in figure 3(a), we plot as black dotted line the sum of all the terms of (38) as an estimation of the local up-scaling error. As an aside, we scaled the forces in the streamwise direction by  $\eta_f \dot{\gamma}/d$  and in the vertical direction by  $\rho_f g$ , the ratio between these scaling being  $(r - 1)\theta$ . Figure 4(b) presents the vertical distribution of the shear stress  $\Sigma_{xy}^f$  (blue) and its three contributions given in (39). The black dotted line is  $\Sigma_{xy}^f$  obtained by vertically integrating (38) in order to indicate the cumulative up-scaling error.

In line with figure 3(a) the inertial term in the streamwise direction is negligible for the present set of dimensionless parameters (blue dashed line in figure 4(a)). Here however, the forces are non-zero in the bedload region of the moving layers only. In this region, the drag force acting on the grains is balanced by the divergence of the shear stress in the fluid. As in the vertical direction, the error balance is small but, here, the maximum error is located at the top of the bedload layer.



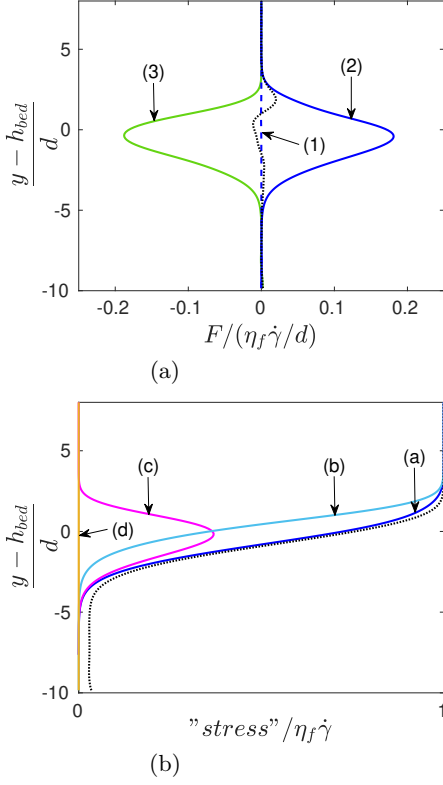


FIG. 4. (a) Vertical distribution of all the terms of the momentum balance (38) of the equivalent fluid phase in the streamwise direction ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ): advection (dashed blue); divergence of shear stress (solid blue); fluid-grain interaction - drag force (green). The black dotted line corresponds to the ‘error’ of the up-scaling procedure (sum of all the terms of (38)). (b) Vertical distribution of the shear stress  $\Sigma_{xy}^f$  (blue) and its three contributions given in (39), namely  $\epsilon \langle \sigma_{xy} \rangle^f$  (cyan);  $n \langle s_{xy}^f \rangle^p$  (magenta);  $-\rho_f \epsilon \langle u' v' \rangle^f$  (yellow). The black dotted line is  $\Sigma_{xy}^f$  obtained by vertically integrating (38), indicating the cumulative up-scaling error.

Figure 4(b) presents the vertical distribution of the shear stress  $\Sigma_{xy}^f$  and its three contributions. As in the vertical direction, the Reynolds stress term is negligible with the present range of parameters. The viscous shear stress of the fluid  $\epsilon \langle \sigma_{xy} \rangle^f$  (cyan) goes from a constant value of one in the pure fluid region down to a constant value of zero in the static bed region (when scaled by  $\eta_f \dot{\gamma}$ ), as suggested by the fluid velocity profile in figure 1(d). In contrast, the contribution of the grains to the fluid shear stress  $n \langle s_{xy}^f \rangle^p$  (magenta) is significant in the bedload region only, shifting in a way the influence of the total shear stress  $\Sigma_{xy}^f$  deeper in the granular bed. Note that here, the maximum cumulative error is around 3.4% of the total shear stress (black dotted line). This is again due to small discrepancies close to the bed surface which is cumulated when integrating down to the static bed

To finish with, the small discrepancy in momentum balance pointed out in figure 4 stresses the limitation of the mesoscale approach for our configuration as mentioned previously. However, one shows that surprisingly, this limitation does not imply a significant error, which is moreover very localized at the bed surface. An improvement could be expected by considering larger order terms in the asymptotic expansion used to derive the mesoscopic equations (see section III A). According to the small discrepancy on the momentum balances and the objective of the present paper, such analyses remain beyond the scope of the present paper and is postponed to future works.

## 2. The equivalent granular phase

Let us consider the equivalent granular phase. The momentum balance in the vertical direction (17) here reads

$$\underbrace{\rho_p \phi \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_y \rangle^p}{\partial y}}_{(1)} = \underbrace{\frac{\partial \Sigma_{yy}^p}{\partial y}}_{(2)} + \underbrace{\phi \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y}}_{(3)} + \underbrace{n \langle f_1 \rangle_y^p}_{(4)} + \underbrace{\rho_p \phi g_y}_{(5)}, \quad (40)$$

with

$$\Sigma_{yy}^p = n \langle s_{yy}^s \rangle^p - \rho_p \epsilon \langle v'^2 \rangle^p. \quad (41)$$

The vertical distribution of each term of (40) is plotted in figure 5(a). The apparent weight of the granular phase (weight less generalized buoyancy) is balanced by the divergence of the granular normal stress, often referred to as granular pressure  $\Sigma_{yy}^p$ . The inertial term is again negligible here.

In figure 5(b), the vertical distribution of the normal stress of the granular phase  $\Sigma_{yy}^p$  is plotted and its two contributions given in (41). The black dotted line is  $\Sigma_{yy}^p$  obtained by vertically integrating (40). This indicates the cumulative up-scaling error. Here, we have  $\Sigma_{yy}^p \approx n \langle s_{yy}^s \rangle^p$ , so  $\Sigma_{yy}^p$  is zero in the pure fluid region and linearly increases as one goes down in the granular bed (granulostatic equilibrium).

The momentum balance in the streamwise direction (17) of the equivalent granular phase reads

$$\underbrace{\rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_x \rangle^p}{\partial y}}_{(1)} = \underbrace{\frac{\partial \Sigma_{xy}^p}{\partial y}}_{(2)} + \underbrace{\phi \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y}}_{(3)} + \underbrace{n \langle f_1 \rangle_x^p}_{(4)}. \quad (42)$$

with

$$\Sigma_{xy}^p = n \langle s_{xy}^s \rangle^p - \rho_p \epsilon \langle u' v' \rangle^p. \quad (43)$$

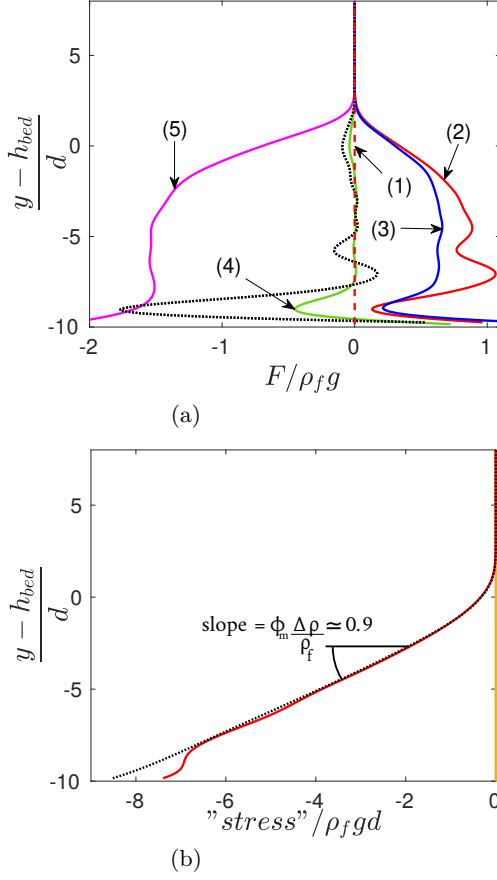


FIG. 5. (a) Vertical distribution of all the terms of the momentum balance (40) of the equivalent granular phase in the vertical direction ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ): inertia (dashed red); divergence of normal stress (red); generalized buoyancy (blue); fluid-grain interaction - lift force (green); weight (magenta). The black dotted line corresponds to the 'error' of the up-scaling procedure (sum of all the terms of (40)). (b) Vertical distribution of the normal stress  $\Sigma_{yy}^p$  (red) and its two contributions given in (41), namely  $n\langle s_{yy}^s \rangle^p$  (magenta);  $-\rho_p \phi \langle v'^2 \rangle^f$  (yellow). Note that here  $\Sigma_{yy}^p \approx n\langle s_{yy}^s \rangle^p$ . The black dotted line is  $\Sigma_{yy}^p$  obtained by vertically integrating (40), indicating the cumulative up-scaling error.

The vertical distribution of all the terms of (42) is presented in figure 6(a) for  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$ . The drag force is dominant in the bedload moving layer and contributes to about 60% of the driving force in the streamwise direction, the remaining 40% stems from the generalized buoyancy (inertia is negligible here).

It is worth noting that, here, the 'balance error' is quite significant in the whole static bed region, and not only near the bottom rough wall and the bed surface. This is due to the time averaging of correlated samples when particles remain static (in particular when we time average forces for particles at the exact same location). Those

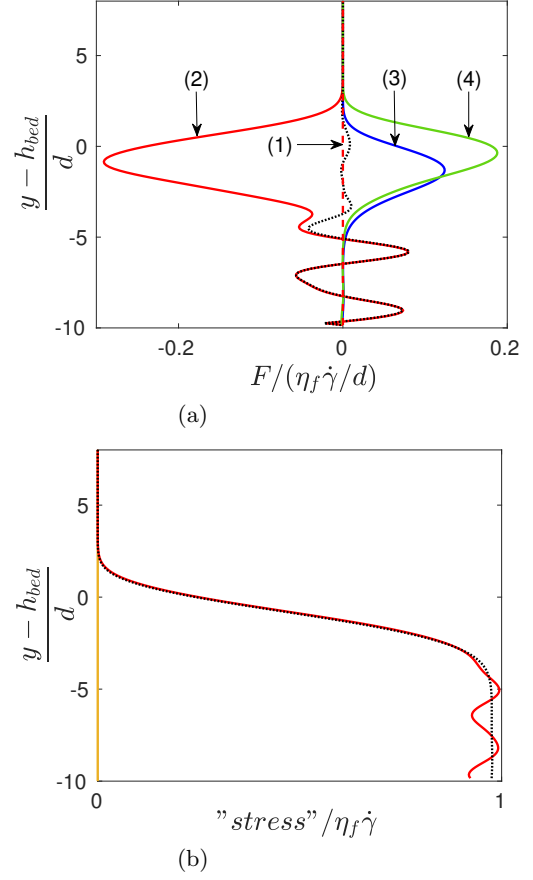


FIG. 6. (a) Vertical distribution of all the terms of the momentum balance (42) of the equivalent granular phase in the streamwise direction ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ): advection (dashed red); divergence of shear stress (red); generalized buoyancy (blue); fluid-grain interaction - drag force (green). The black dotted line corresponds to the 'error' of the up-scaling procedure (sum of all the terms of (42)). (b) Vertical distribution of the shear stress  $\Sigma_{xy}^p$  (red) and its two contributions given in (43), namely  $n\langle s_{xy}^s \rangle^p$  (magenta);  $-\rho_p \epsilon \langle u' v' \rangle^p$  (yellow). Note that here  $\Sigma_{xy}^p \approx n\langle s_{xy}^s \rangle^p$ . The black dotted line is  $\Sigma_{xy}^p$  obtained by vertically integrating (42), indicating the cumulative up-scaling error.

fluctuations, however, are limited in amplitude and localized in the static bed. As we will focus in the following on the rheological flow curve, which is valid above the threshold of motion, i.e. in the moving layer, these fluctuations in the static bed do not affect the rheological description.

Figure 6(b) presents the vertical distribution of the shear stress  $\Sigma_{xy}^p$  and its two contributions given in (43).  $\Sigma_{xy}^p$  is zero in the pure fluid region, increases in the bedload moving layer and reaches a roughly constant value of  $\approx \eta_f \dot{\gamma}$  in the static bed region. Hence, the fluid shear stress in the pure fluid region

has been fully transferred, as expected, to the granular phase in the static bed via the bedload moving layer.

## B. Rheological models at the mesoscale

In this section, we discuss the rheology of the different equivalent phases computed from the microscale simulations, and compare our results to models found in the literature. Note that for the mixture phase, the rheology, i.e. the shear stress closure model, remains the only closure term to be modeled. Its contribution comes from both the equivalent fluid phase and the equivalent granular phase as shown in section III B.

### 1. Equivalent fluid phase

First consider the apparent rheology of the equivalent fluid phase. Assuming that the equivalent fluid phase is Newtonian, its apparent viscosity  $\eta_{eq}^f$  is a scalar which can be determined as  $\eta_{eq}^f = \Sigma_{xy}^f / (\partial \langle u_x \rangle^f / \partial y)$  for the 1D shear flow considered here. For convenience, it is usually preferred to use  $(\Sigma_{xy}^f + \Sigma_{yx}^f) / 2$  instead of  $\Sigma_{xy}^f$  for symmetry reasons (even if those two terms are almost equal, the maximum difference being of the order of  $0.02 \eta_f \dot{\gamma}$ ). According to the previous definition of the effective fluid viscosity, the equivalent fluid stress is then proportional to the effective fluid strain rate. However, this link is far from being obvious, and remains an open question. In particular, using this definition for the effective stress would require to define a bulk viscosity according to the compressibility of the equivalent fluid phase. Another approach, which has been commonly used in the literature according to solution derived for dilute suspension in a viscous Stokes regime, is to make use of the incompressibility of the mixture phase  $\langle \mathbf{u} \rangle = \phi \langle \mathbf{u}_p \rangle^p + \epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f$  to define the stress as a function of its strain rate even for the equivalent fluid phase [6, 39, 40]. In the end, we use the following definition for computing the apparent viscosity of the equivalent fluid phase

$$\eta_{eq}^f = \frac{1}{2} \frac{(\Sigma_{xy}^f + \Sigma_{yx}^f)}{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}}. \quad (44)$$

More specifically, from the vertical distribution of  $\Sigma_{xy}^f$ ,  $\Sigma_{yx}^f$  and  $\langle u_x \rangle$ , we compute  $\eta_{eq}^f(y) / \eta_f$ . Using the vertical distribution of the solid volume fraction  $\phi(y)$  (see e.g. the black line in figure 1(d)), we can eliminate the vertical coordinate  $y$  and plot the apparent viscosity of the equivalent fluid phase as a function of  $\phi$ , as done in figure 7 (dot symbols) for  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ .

The apparent viscosity of the fluid phase obtained in this case is very well fitted by the power law (29) with

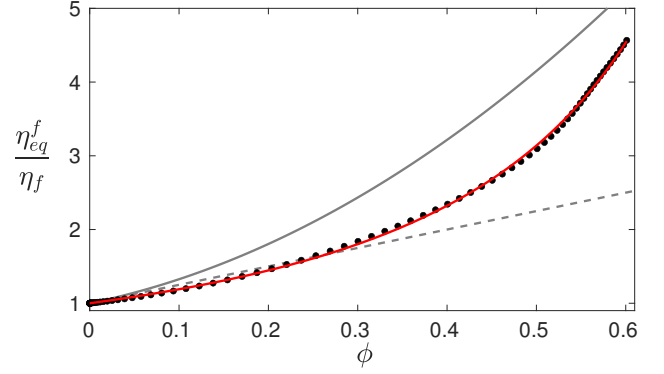


FIG. 7. Apparent viscosity  $\eta_{eq}^f / \eta_f$  of the fluid phase vs. solid volume fraction  $\phi$ : (•), present IBM-DEM simulation for  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  (eq. (44)); (dashed black), Einstein's model [8, 9]  $\eta_{eq}^f / \eta_f = 1 + \frac{5}{2} \phi$ ; (solid black), Gibilaro et al. (2007)'s correlation [11]  $\eta_{eq}^f / \eta_f = (1 - \phi)^{-\beta}$  with  $\beta = 2.8$ ; (red), adjustment with  $\eta_{eq}^f / \eta_f = (1 - \phi)^{-1.65}$ .

$\beta = 1.65$ . Note that this value is rather different than  $\beta = 2.8$ .

Figure 8(a) is similar to figure 7 but displays the apparent viscosity of the fluid phase for all the cases considered here, i.e.  $Re_p = \{0.1, 1, 10\}$  and  $\theta \in [0.1, 0.7]$ . One observes that the rheological curve strongly varies with these two parameters. In any case,  $\eta_{eq}^f / \eta_f$  can be fitted with a law of the form  $(1 - \phi)^{-\beta}$  as previously, but now with  $\beta = \beta(\theta, Re_p)$ . In particular, increasing  $\theta$  or  $Re_p$  increase the effective fluid viscosity. Such an increase is related to the fact that stronger shear corresponds to larger agitation and momentum transfert by velocity fluctuations.

Figure 8(b) presents the corresponding value of the  $\beta$  exponent used in the constitutive law  $\eta_{eq}^f / \eta_f = (1 - \phi)^{-\beta}$  as a function of  $\theta$  and  $Re_p$  and obtained from a best fit of the data of figure 8(a). As already mentioned, the exponent  $\beta$  obtained here strongly depends on the particle Reynolds number and the Shields number. The  $\theta$ -dependency seems linear and the  $Re_p$ -dependency is well described by a power law, as

$$\beta = 0.53 + 1.71 \theta Re_p^{0.38}, \quad (45)$$

for the explored values of  $\theta$  and  $Re_p$ .

### 2. The equivalent granular phase

We now consider the apparent rheology of the equivalent granular phase. We compute the vertical distribution of the inertial number  $\mathcal{I}(y) = |\dot{\gamma}| d / \sqrt{P^p / \rho_p}$  and the viscous number  $\mathcal{J}(y) = |\dot{\gamma}| \eta_f / P^p$  to obtain  $\mathcal{K}(y) = \mathcal{J} + \alpha \mathcal{I}^2$  (with  $\alpha = 0.635$ , as [13]). The granular pressure  $P^p$  is defined as  $P^p = -(\Sigma_{xx} + \Sigma_{yy} + \Sigma_{zz}) / 3$ . It has been checked that the diagonal contribution of the stress is

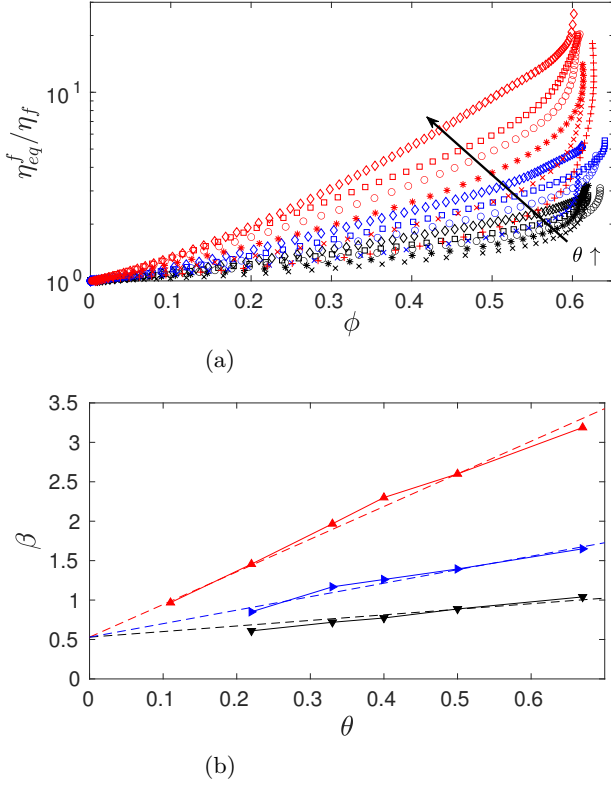


FIG. 8. (a): Apparent viscosity  $\eta_{eq}^f/\eta_f$  of the fluid phase vs. solid volume fraction  $\phi$  for all the cases considered in the present work: ( $\blacktriangledown$ ),  $Re_p = 0.1$ ; ( $\blacktriangleright$ ),  $Re_p = 1$ ; ( $\blacktriangle$ ),  $Re_p = 10$ . (b): Exponent  $\beta$  used in the constitutive law  $\eta_{eq}^f/\eta_f = (1 - \phi)^{-\beta}$  as a function of  $\theta$ . Linear trends are also plotted as dashed lines and correspond to  $\beta = 0.53 + 1.71 \theta Re_p^{0.38}$ .

nearly isotropic, i.e.  $\Sigma_{xx} \approx \Sigma_{yy} \approx \Sigma_{zz}$  (figure 9). However, the  $y$  component is smoother, while the other contributions show more oscillation in the granular bed. We therefore use  $-\Sigma_{yy}$  instead of  $P^p$ .

Using the vertical distribution of the solid volume fraction  $\phi(y)$ , we eliminate  $y$  and plot in figure 10(a) the solid volume fraction  $\phi$  as a function of  $\mathcal{K}$  (dot symbols).  $\phi(\mathcal{K})$  is well represented by Trulsson et al. (2012) [13] model (33) up to  $\mathcal{K} \simeq 25$  as shown by the red line in figure 10(a). Note that this range of validity is larger than intervals explored by Boyer et al. (2011) [12] and Trulsson et al. (2012) [13] for which  $\mathcal{K} \leq 0.1$ , i.e. for  $\phi \leq 0.45$ . Figure 10(a) then shows that surprisingly the validity of (33) seems to be extended to the range  $0.1 \leq \phi \leq 0.45$ . Note that this range corresponds to the transition from the granular bed to the pure fluid phase, within the moving layer and probably including part of the diffuse interface at the mesoscale.

We now compute the equivalent friction coefficient of the granular medium  $\mu_{eq}^p$  as

$$\mu_{eq}^p = \frac{\frac{1}{2}(\Sigma_{xy}^p + \Sigma_{yx}^p)}{-\Sigma_{yy}^p}. \quad (46)$$

Again, we here used  $\Sigma_{yy}$  instead of  $P^p$ . This choice is motivated by the fact that we observed some normal stresses differences (figure 9).

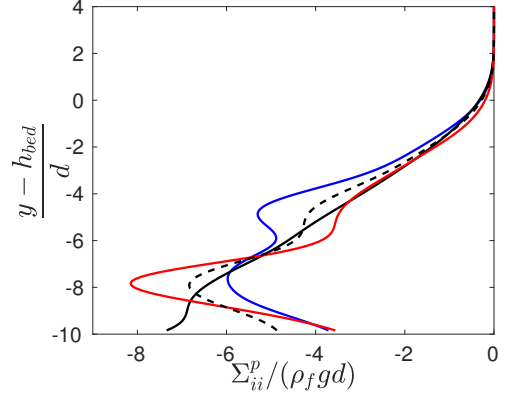


FIG. 9. Vertical distribution of the normal components of the equivalent granular phase ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ): (solid black),  $\Sigma_{yy}^p$ ; (blue),  $\Sigma_{xx}^p$ ; (red),  $\Sigma_{zz}^p$ ; (dashed black),  $P^p = (\Sigma_{xx}^p + \Sigma_{yy}^p + \Sigma_{zz}^p)/3$ .

The effective friction coefficient is shown in figure 10(b) for  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$  (dot symbols). The model of Trulsson et al. (2012) [13], namely (34)-(35) describes well the present numerical results (red line). In particular, we used  $\mu_1 = 0.243$ ,  $\mu_2 = 0.794$  and  $\sqrt{K_0} = 0.125$  which are consistent with the values obtained by Trulsson et al. (2012) [13] who have  $\mu_1 = 0.277$ ,  $\mu_2 = 0.85$  and  $\sqrt{K_0} = 0.29$ .

Figure 11 is similar to figure 10 but displays the constitutive law of the equivalent granular phase for all the cases considered here. Compared to the case of the rheology of the fluid phase, the rheology of the granular phase is not much dependent on  $\theta$  and  $Re_p$ , with a more significant difference at small  $\theta$ , i.e. close to the threshold of motion. This variation is shown in figure 12. In particular, the value of the model's parameters  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\sqrt{K_0}$  and  $\phi_c$  is given in as a function of  $Re_p$  and  $\theta$ .

Accordingly, fitting  $\mu_1$  and  $\mu_2$  give

$$\mu_1 \simeq 0.214 + 5.78 \times 10^{-2} Re_p, \quad (47)$$

and

$$\mu_2 \simeq 0.57 + 0.30 \theta + 1.3 \times 10^{-2} Re_p. \quad (48)$$

The variation of  $\sqrt{K_0}$  is more complex. Note, however, that for  $\theta \gtrsim 0.3$ ,  $\sqrt{K_0}$  remains in the range  $0.07 \lesssim \sqrt{K_0} \lesssim 0.4$ . At smaller  $\theta$ ,  $\sqrt{K_0}$  increases significantly, highlighting a clear different trend of the

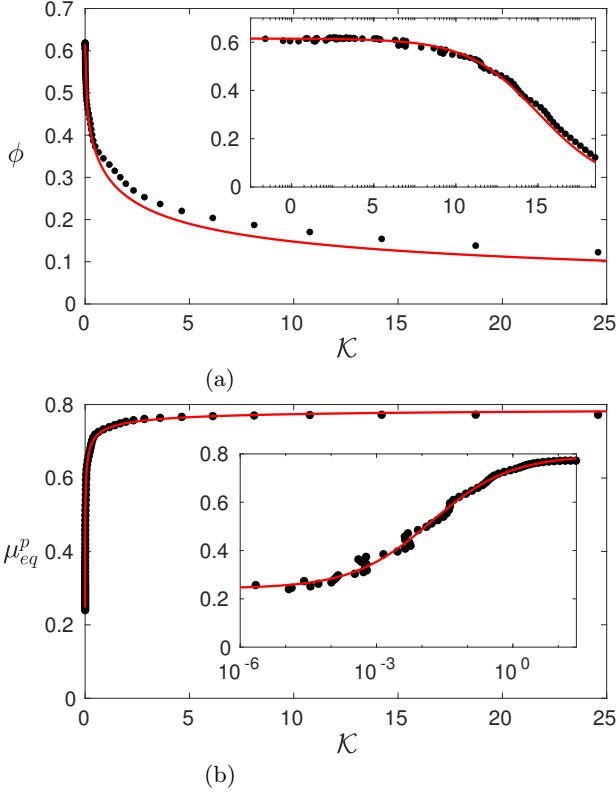


FIG. 10. Constitutive law of the equivalent granular phase ( $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$ ). (a) Solid volume fraction  $\phi$  versus  $\mathcal{K}$ , (b) Apparent friction coefficient  $\mu_{eq}^p$  versus  $\mathcal{K}$ : ( $\bullet$ ), present IBM-DEM simulation; (red),  $\phi(\mathcal{K})$  and  $\mu_{eq}^p(\mathcal{K})$  given by (33) and (35), respectively, with  $\phi_c = 0.615$ ,  $\mu_1 = 0.243$ ,  $\mu_2 = 0.794$  and  $\sqrt{K_0} = 0.125$ . Inserts: semi-log representation.

curve  $\mu - \mathcal{K}$  as shown in figure 11. Finally,  $\phi_c$  seems to be an increasing function of  $\theta$ , independently of the particle Reynolds number which remains in the range  $0.59 \lesssim \phi_c \lesssim 0.62$ .

### 3. The equivalent mixture phase

Let us finally consider the equivalent mixture phase. As shown in (24), the forces acting on this phase correspond to the divergence of the total apparent stress tensor and the weight of the mixture. Hence, the vertical distribution of the forces and stresses acting on this phase are equivalent to the sum of the forces and stresses on the fluid and granular equivalent phases presented in figures 3-4 and 5-6, respectively.

As done for the apparent fluid and granular phases, we now investigate the rheological behaviour of the mixture phase, via the calculation of the apparent viscosity  $\eta_{eq}^m$ . The ‘natural’ way for computing  $\eta_{eq}^m$  is to use  $\eta_{eq}^m = \Sigma_{xy}^{tot} / (\partial \langle u_x \rangle^m / \partial y)$ , with  $\langle \mathbf{u} \rangle^m$  defined as  $\bar{\rho} \langle \mathbf{u} \rangle^m =$

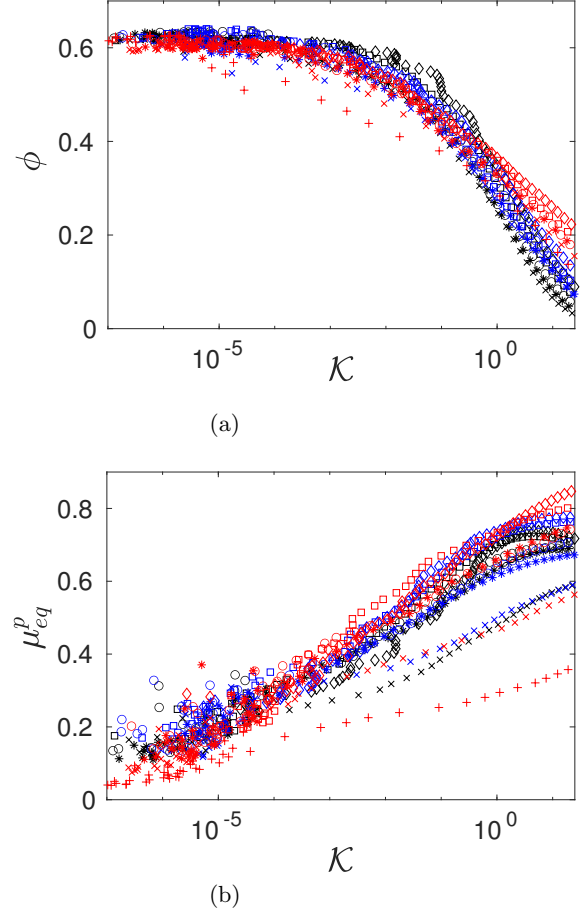


FIG. 11. Constitutive laws  $\phi(\mathcal{K})$  and  $\mu_{eq}^p(\mathcal{K})$  of the equivalent granular phase for all the cases considered in the present work: (black)  $Re_p = 0.1$ ; (blue),  $Re_p = 1$ ; (red),  $Re_p = 10$ . The various symbols indicate various  $\theta$  as in figure 8(a).

$\rho_p \phi \langle \mathbf{u} \rangle^s + \rho_f \epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f$  (see eq. (23)). Here, however, and for the same reasons as those mentioned in section IV A 1, we compute the velocity gradient at the denominator using  $\langle \mathbf{u} \rangle = \phi \langle \mathbf{u} \rangle^p + \epsilon \langle \mathbf{u} \rangle^f$ .

In the present work,  $\eta_{eq}^m$  is thus computed as

$$\eta_{eq}^m = \frac{\Sigma_{xy}^{tot}}{\partial \langle u_x \rangle} = \frac{\frac{1}{2} (\Sigma_{xy}^p + \Sigma_{yx}^p + \Sigma_{xy}^f + \Sigma_{yx}^f)}{\frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y}}. \quad (49)$$

From the vertical distribution of  $\eta_{eq}^m(y)/\eta_f$  and that of the solid volume fraction  $\phi(y)$ , we plot evolution of the apparent viscosity of the equivalent mixture phase  $\eta_{eq}^m/\eta_f$  as a function of  $\phi$  in figure 13. For comparison, various models are also plotted, namely that of Einstein [8, 9], Batchelor and Green (1972) [10], Krieger and Dougherty (1959) [34] and Boyer et al. (2011) [12].

One can notice a good agreement with Einstein’s model, Batchelor and Green’s model and Krieger and

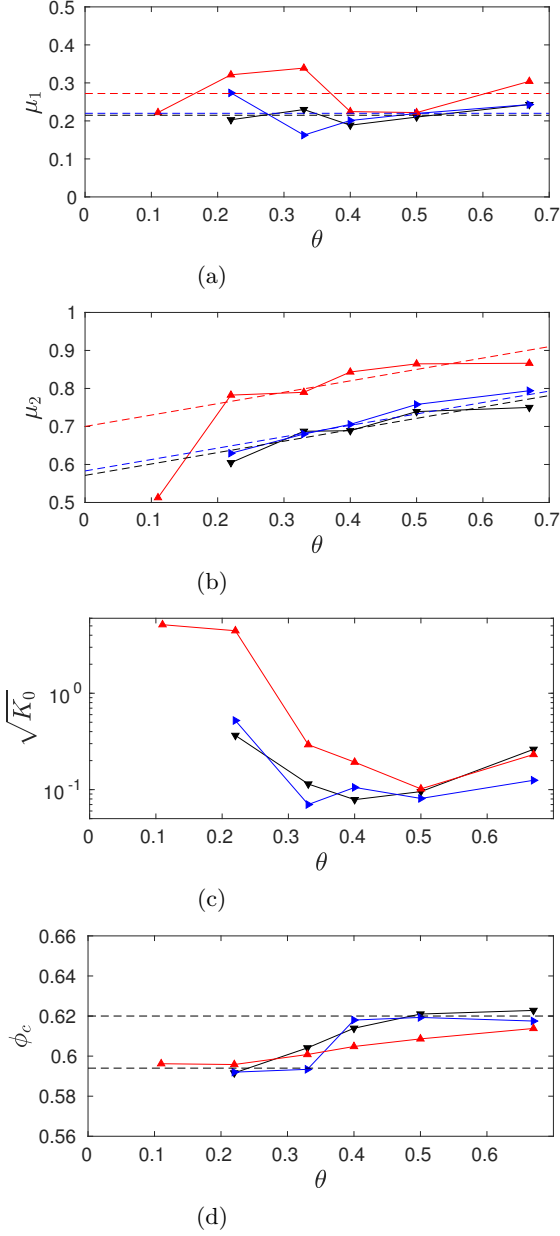


FIG. 12. Evolution of the parameters used in the model (33)-(35) of [13] as a function of  $\theta$  and  $Re_p$ : ( $\blacktriangledown$ ),  $Re_p = 0.1$ ; ( $\blacktriangleright$ ),  $Re_p = 1$ ; ( $\blacktriangle$ ),  $Re_p = 10$ . The dashed lines represent (a)  $\mu_1 \simeq 0.214 + 5.78 \times 10^{-2} Re_p$ ; (b)  $\mu_2 \simeq 0.57 + 0.30 \theta + 1.3 \times 10^{-2} Re_p$ ; (d),  $0.59 \leq \phi_c \leq 0.62$ .

Dougherty's model up to  $\phi \lesssim 0.1$ ,  $0.3$  and  $0.5$ , respectively. Recall that the range  $0.5 \leq \phi \leq \phi_m$  corresponds to the static bed region for which the samples used for the time averaging are correlated. Nevertheless, the agreement between the present IBM-DEM results and Krieger and Dougherty's model for  $0.5 \leq \phi \leq \phi_m$  is reasonable. Good agreement is also observed with Boyer et

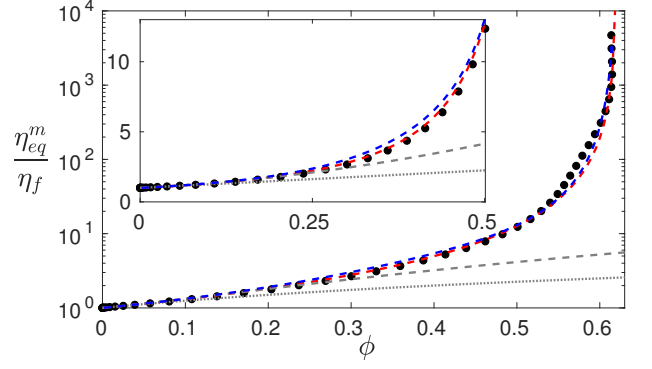


FIG. 13. Apparent viscosity  $\eta_{eq}^m/\eta_f$  of the equivalent mixture phase vs. solid volume fraction  $\phi$ : ( $\bullet$ ), present IBM-DEM simulation for  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  (eq. (49)); (dotted black), Einstein's model [8, 9]  $\eta_{eq}^m/\eta_f = 1 + \frac{5}{2}\phi$ ; (dashed black), Batchelor and Green's model [10]  $\eta_{eq}^m/\eta_f = 1 + \frac{5}{2}\phi + 7.6\phi^2$ ; (dashed red), Krieger and Dougherty's model [34]  $\eta_{eq}^m/\eta_f = (1 - \phi/\phi_m)^{-\frac{5}{2}\phi_m}$  with  $\phi_m = 0.62$ ; (dashed blue) Boyer et al.'s model [12]  $\eta_{eq}^m/\eta_f = 1 + \frac{5}{2}\phi(1 - \phi/\phi_c)^{-1} + \mu_p(\phi)((\phi/(\phi_c - \phi))^2)$  with  $\phi_c = 0.615$ ,  $\mu_1 = 0.243$ ,  $\mu_2 = 0.794$  and  $\sqrt{K_0} = 0.125$ . Insert: linear representation.

al. (2011)'s model for the whole range of  $\phi$ .

Figure 14(a) presents the apparent viscosity  $\eta_{eq}^m/\eta_f$  of the mixture phase vs. solid volume fraction  $\phi$  for all the cases considered in the present work while figure 14(b) displays the value of  $\phi_m$  obtained from a best fit of Krieger and Dougherty's model [34].

The range of variation of  $\phi_m$  is rather small, i.e.  $\phi_m = 0.62 \pm 0.02$ . This is in line with the variations of  $0.59 \lesssim \phi_c \lesssim 0.62$  in figure 12(d) for the equivalent granular phase. However, we can see in figure 14(a) that  $\eta_{eq}^m/\eta_f$  may vary by one order of magnitude depending on  $\theta$  and  $Re_p$ , in particular at large  $\phi \gtrsim 0.4$ . This suggests that Krieger and Dougherty's model [34] may not be fully satisfactory to describe the mixture rheology in the present configuration of bedload transport.

Following Boyer et al. (2011) [12], we propose a new constitutive law for the apparent viscosity of the mixture phase, as the sum of the fluid and granular contributions using the correlations obtained in figures 8 and 12, respectively, as

$$\frac{\eta_{eq}^F}{\eta_f} = \underbrace{(1 - \phi)^{-\beta}}_{\eta_{eq}^f/\eta_f} + \underbrace{\mu_{eq}^p(\phi) \left( \frac{\phi}{\phi_c - \phi} \right)^{2.5\phi_c}}_{\eta_{eq}^p/\eta_f}, \quad (50)$$

with  $\beta = 0.53 + 1.71 \theta Re_p^{0.38}$ ,  $\mu_{eq}^p(\phi) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)/[1 + \sqrt{K_0}\phi/(\phi_c - \phi)]$  obtained by combining equations (33) and (35),  $\mu_1 \simeq 0.214 + 5.78 \times 10^{-2} Re_p$ ,  $\mu_2 \simeq 0.57 + 0.30 \theta + 1.3 \times 10^{-2} Re_p$ ,  $\phi_c = 0.615$  and  $\sqrt{K_0} = 0.125$ .



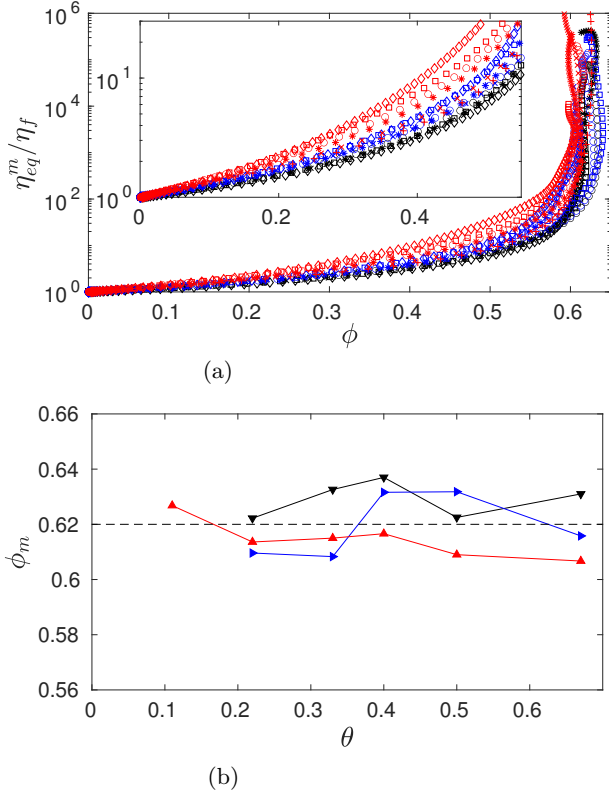


FIG. 14. (a) Apparent viscosity  $\eta_{eq}^m/\eta_f$  of the mixture phase vs. solid volume fraction  $\phi$  for all the cases considered in the present work: ( $\blacktriangledown$ ),  $Re_p = 0.1$ ; ( $\blacktriangleright$ ),  $Re_p = 1$ ; ( $\blacktriangle$ ),  $Re_p = 10$ ; for all  $\theta$  with the same markers as in figure 8. (b) Values of  $\phi_m$  from a best fit of Krieger and Dougherty's model [34]  $\eta_{eq}^m/\eta_f = (1 - \phi/\phi_m)^{-\frac{5}{2}\phi_m}$ . The dashed line indicates the corresponding mean value.

In figure 15, we compare the effective viscosity obtained from the present IBM-DEM simulations  $\eta_{eq}^m$  with  $\eta_{eq}^F$  (frame c). We also compare  $\eta_{eq}^m$  with that predicted by Krieger and Dougherty's model (1959) [34], denoted  $\eta_{eq}^{KD}$  in figure 15(a) and defined in (27) with  $\phi_m = 0.615$ . Finally, we plot in figure 15(b) the comparison between  $\eta_{eq}^m$  and  $\eta_{eq}^{BGP}$  predicted by Boyer et al.'s model [12], namely  $\eta_{eq}^{BGP}/\eta_f = 1 + \frac{5}{2}\phi(1 - \phi/\phi_c)^{-1} + \mu_p(\phi)(\phi/(\phi_c - \phi))^2$  with  $\mu_p(\phi) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)/[1 + \mathcal{J}_0\phi^2(\phi_c - \phi)^{-2}]$  where  $\phi_c = 0.615$ ,  $\mathcal{J}_0 = 0.125$ ,  $\mu_1 = 0.243$  and  $\mu_2 = 0.794$ .

The present model (50) provides a reasonable estimate for the apparent viscosity of the mixture phase for all the cases considered here, at least up to  $\eta_{eq}^F/\eta_f = \mathcal{O}(10^2)$  ( $\phi \lesssim 0.56$ ). Moreover, one can observe that the two other models are not able to reproduce the simulation results, in the present configuration of bedload transport. The main reason is that they do not take into account the dependence of the viscosity (mostly of the equivalent fluid phase) on  $\theta$  and  $Re_p$ . As a consequence, the effective

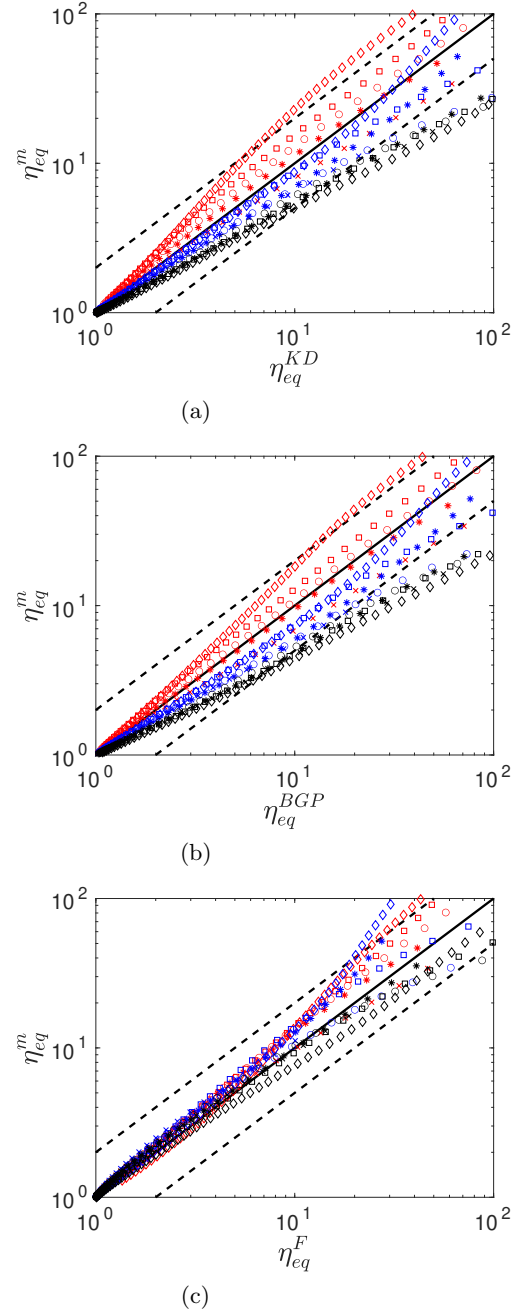


FIG. 15. Comparison of the predicted apparent viscosity of the mixture versus that obtained from present simulations  $\eta_{eq}^m/\eta_f$ : (a) Krieger and Dougherty (1959)  $\eta_{eq}^{KD}/\eta_f$ ; (b) Boyer et al. (2011)  $\eta_{eq}^{BGP}/\eta_f$ ; (c) present model (50)  $\eta_{eq}^F/\eta_f$ . As for the simulation results, the data is restricted to  $\mathcal{K} \geq 2 \times 10^{-4}$ : (black),  $Re_p = 0.1$ ; (blue),  $Re_p = 1$ ; (red),  $Re_p = 10$ . Markers are the same as in figure 8. The two dashed lines represents the discrepancy ratio of 2 and 0.5, respectively.

viscosity is either over- or under-estimated depending on the specific value of these parameters.

## V. DISCUSSION AND CONCLUSION

The bedload transport of a granular bed by a laminar Couette flow, has been studied numerically using a fully resolved IBM-DEM approach, referred here as the microscale description. Bedload transport is known for decades to be strongly dependent on the Shields number  $\theta$  and weakly dependent on the particle Reynolds number  $Re_p$ . In particular,  $\theta$  controls the granular flow rate through a power law dependency.  $Re_p$  is more likely to influence quantitatively these power law scalings due to the regime of the fluid flow at the grain scale.

Above a critical Shields number  $\theta_c$  at which the granular bed starts moving, increasing  $\theta$  leads to more significant transport with increasing thickness of the moving layer. As  $\theta \rightarrow \theta_c$  from above, this therefore tends to a singular sharp interface of the granular bed with only a thin layer of the order of the grain diameter moving. On the other hand, when  $\theta$  increases, the interface between the static granular bed and the pure fluid phase becomes more diffuse and is characterized by a thicker moving layer. The vertical distribution of the volume fraction  $\phi(y)$  evolves from a sharp one surface when  $\theta \approx \theta_c$  towards a smoother shape when  $\theta$  increases. Note, however, that in bedload transport, the upper bed surface hardly gets rid of some sharp transition or discontinuity.

Accordingly, the strategy to model bedload transport at a scale larger than the grain, referred to as mesoscale, remains uncertain, while this is obviously unmissable when dealing with large scale systems. We have proposed here to provide a mixture approach, for which the entire system, including the granular phase and the fluid phase, is solved using a single equivalent fluid. This has been done through the independent description of each phase at the mesoscale prior describing the mixture phase, by using an upscaling -or averaging- method from microscale simulation results. This approach leads to a diffuse interface at the upper surface of the granular bed whatever the Shields number  $\theta$ . The first question addressed in the paper was then the relevance of this approach in a system presenting a strong anisotropy of the mixture properties in the vertical direction. Then, the rheology of the different phases have been determined in order to close the mesoscale equations.

When doing upscaling, separation between the grain size  $d$  and the averaging scale  $h_g$  is required for the validity of the asymptotic development at the mesoscale, which reads  $h_g \gg d/2$ . We have shown that this constraint has to be released to capture the high velocity gradient at the bed surface, as for instance shown for the velocity profiles in figure 18 with  $h_g$  in the range  $[d/10, d]$ . Obviously, the invariance of the flow in the horizontal plane and in time allowed us to decrease  $h_g$  in order to capture gradients, but only down to a certain point. For too small  $h_g$ , mesoscale quantities becomes noisy and strong oscillations along the shear direction in the granular appear. This is actually the limit of validity of the mesoscale approach: microscopic struc-

tures -granular arrangement- are not filtered out by this mesoscale, breaking the isotropic condition for equations validity at a scale smaller than the mesoscale. This highlights that the grain size and the macroscopic length scale of deformation are of the same order of magnitude, in bedload transport. Nevertheless, choosing setting  $h_g = d$  gives a reasonable description of the flow at the mesoscale, and has therefore been used to discuss the rheological models for the different phases.

We here show that the effective viscosity  $\eta_{eq}^f$  of the equivalent fluid evolves with the granular volume fraction  $\phi$  within the bed, with in particular  $\eta_{eq}^f$  increasing with  $\phi$ . This is in line with previous studies on homogeneous suspension flows. However, we observe a dependency of this effective viscosity with  $\theta$ , as with  $Re_p$ , which in general gives a lower value of the viscosity than that found for homogeneous suspensions.

The granular phase is shown to be well described by the classical  $\mu - \mathcal{I}$  rheology, now extended to the  $\mu - \mathcal{K}$  rheology for immersed granular flows. The parameters which characterize this rheology, are found to be also  $(\theta, Re_p)$  dependent.

To finish with, the viscosity of the equivalent mixture is shown to be well represented by the newly proposed constitutive law (50). This law follows the idea proposed by Boyer et al. (2011) [12] that the viscosity of the mixture can be modeled as the sum of that the fluid and granular phases, respectively. In addition, it takes into account the strong variation of the equivalent fluid viscosity w.r.t.  $\theta$  and  $Re_p$ .

Let us finally discuss the relevance of the mesoscale approach in bedload configurations. First, figure 19 shows the influence of  $h_g$  on the effective viscosities, particularly for  $h_g = \{d/2, d/4, d/10\}$ . It is worth noting that the obtained results do confirm the analysis reported for  $h_g = d$  in the paper. However, as already mentioned, decreasing  $h_g$  leads to an increase of noise on the data, reinforcing the choice of a mesoscale length  $h_g$  of the order of the grain diameter  $d$ .

Secondly, and more surprisingly, these results have to be considered in the light of the velocity profiles in figure 18. The influence of  $h_g$  on these profiles, and particularly the granular profiles, have been shown to be quite significant, i.e. on the length scale of the diffuse mesoscale interface. This means that the granular velocity (and its gradients) and the solid volume fraction  $\phi$  strongly depend on the vertical location  $y$  and the averaging length  $h_g$ . In contrast, the apparent viscosity of the granular phase seems to be relatively independent of  $h_g$ , as shown in figure 19 (besides an increase of the dispersion of the data when  $h_g$  is decreased). The reason for this remains unclear to the authors and deserves further investigation. Such an investigation is left for future work.



## ACKNOWLEDGMENTS

We warmly thank Prof. Alessandro Bottaro for helpful discussions and suggestions. This work was supported by the Chaire Bioskins of the IdEx of the University of Toulouse, of which A. Bottaro is the holder. We also thank Annaig Pedrono for her support regarding the solvers JADIM and GraDyM. Some of the computational time was provided by the Scientific Grouping CALMIP (project P1027).

### Appendix A: Effect of the spatial resolution and the domain size on the mesoscale results

Here, we assess the effect of the spatial resolution, the domain size and the ‘thickness’ of the immersed boundary  $\Delta_\alpha$  (see section II A for definition). Four cases are considered and presented in table I. The first one is the numerical setup used in the main text of the present work, the three others correspond to a larger domain, a higher spatial resolution and a thinner immersed boundary  $\Delta_\alpha$ . Note that for all these cases, we set as characteristic size of the weighting function  $h_g = d$  (see section III A).

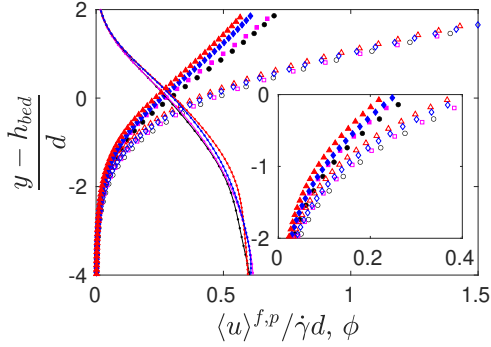
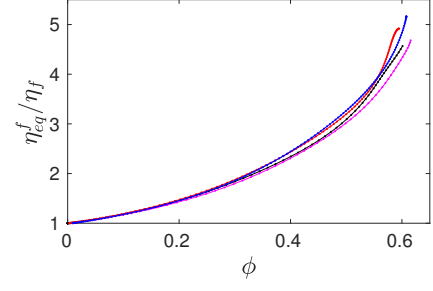


FIG. 16. Vertical profiles of streamwise granular velocity (filled symbols), fluid velocity (open symbols) and solid volume fraction (solid lines). (●): case A; (■): case B; (▲): case C; (◆): case D.

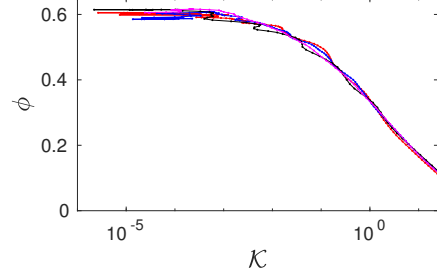
Figures 16 and 17 present the mesoscopic velocity profiles and constitutive laws, respectively, for the various phases. The results of the four cases are roughly identical.

As for the velocity profiles, results are superimposed except at the top of the moving bedload layer. In this region, the granular velocity is slightly faster for cases A and B than for cases C and D. The maximum difference is  $0.11\gamma d$  which corresponds to about 19% of the maximum velocity of case A.

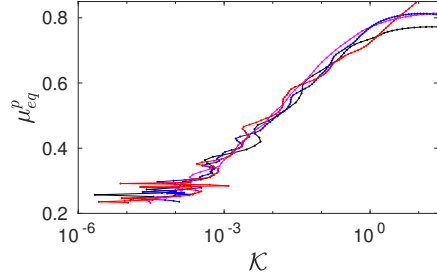
As for the constitutive laws, the results are mostly superimposed. The apparent viscosity of the fluid phase



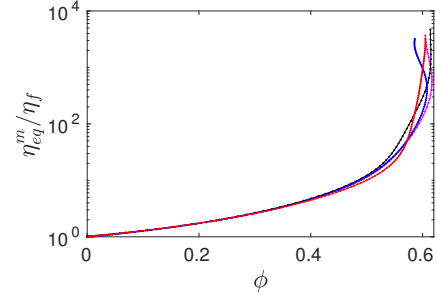
(a)



(b)



(c)



(d)

FIG. 17. Effect of the spatial resolution and size of the domain on the constitutive laws of the equivalent (a) fluid phase, (b,c) granular phase and (d) mixture phase: (black), case A; (magenta), case B; (red), case C; (blue), case D.

slightly depends on mesh refinement (see figure 17(a) for  $\phi \leq 0.5$ ). At higher solid volume fraction, variations induced by the averaging procedure occur and interpretation of the results becomes more difficult. A best-fit of the results using the model (29), namely  $\eta_f^{eq} / \eta_f =$

Case	Spatial resolution $d/\Delta x$	Computational domain size $L_x \times L_y \times L_z$	Thickness of the immersed boundary $\Delta_\alpha$	Comment
A (●)	10	$4d \times 20d \times 4d$	$1.3\Delta x = 0.13d$	reference
B (■)	10	$8d \times 20d \times 8d$	$1.3\Delta x = 0.13d$	larger domain
C (▲)	20	$4d \times 20d \times 4d$	$2.6\Delta x = 0.13d$	refined grid
D (◆)	20	$4d \times 20d \times 4d$	$1.3\Delta x = 0.065d$	reduced IBM thickness

TABLE I. Summary of the different cases considered in appendix A. Here,  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$ .

$(1 - \phi)^{-\beta}$ , gives  $\beta = 1.65$  and  $1.62$  for cases A and B, respectively, and  $1.73$  and  $1.71$  for cases C and D, respectively (note that here we only use data for  $\phi \leq 0.5$ ).

As for the equivalent granular phase (figure 17(b-c)), fluctuations are observed at small  $\mathcal{K}$  where the bed is static. Similarly, one can compare the value of the parameters of models (33) and (35) obtained by a best-fit for all the cases. Results are presented in table II and are roughly similar between the four cases. The same conclusion can be drawn for the equivalent mixture phase (figure 17(d)). In table II, the value of  $\phi_m$  of Krieger and Dougherty (1958)'s model (27) is almost identical for all the cases.

As an aside, one can notice that the values of  $\phi_m$  and  $\phi_c$  are quite close. They have the same physical meaning but come from a best-fit of different models. The fact that we find almost the same value supports the relevance of the present upscaling method.

case	Granular phase				Mixture phase
	$\phi_c$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\sqrt{K_0}$	$\phi_m$
A	0.615	0.243	0.794	0.125	0.617
B	0.624	0.227	0.829	0.115	0.624
C	0.619	0.246	0.836	0.145	0.614
D	0.619	0.234	0.871	0.152	0.617

TABLE II. Coefficients defining the rheology of the equivalent granular phase (eqs. (33) and (35)) and mixture phase (eq. (27)) for the four considered cases A, B, C and D.

## Appendix B: Influence of the characteristic length of the weighting function $h_g$ on the mesoscopic results

In this section we assess the dependency of the mesoscopic results on the characteristic length of the weighting function  $h_g$ . Here,  $Re_p = 1$  and  $\theta = 0.67$  and we use the setup of case A of table I.

The equations of the averaged phases (16)-(17) are supposed to be valid only if  $h_g \gg d$ . Conversely, one needs a  $h_g$  not too large in order to capture the local variations of the mesoscopic quantities. Therefore, it is of crucial importance to assess the effect of  $h_g$  on the results.

Figure 18 presents the streamwise velocity profiles for both phases and for the solid volume fraction for  $h_g = d, d/2, d/4$  and  $d/10$ . Note that  $h_g = d/10$  here

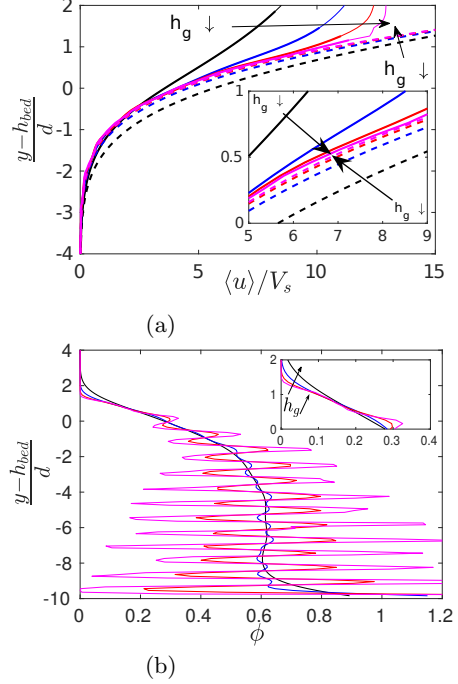


FIG. 18. (a) Velocity profile of the fluid phase (dashed) and the granular phase (solid) for various of  $h_g = \{d/10, d/4, d/2, 1\}$ . Velocity is scaled by  $V_s$  with  $V_s = (\rho_p - \rho_f)gd^2/(18\eta_f)$  the Stokes velocity. (b) Solid volume fraction  $\phi$  for the same values of  $h_g$ .

corresponds to  $h_g = \Delta x$ , that is the smallest value of  $h_g$  which can be considered here.

The velocity profiles strongly depends on the value of  $h_g$ . In particular, the velocity of the granular phase in the moving bedload layer is quite sensitive to the specific value of  $h_g$ . For instance, at  $y = h_{bed} + d$ , the granular velocity decreases by about 40% from  $h_g = 1/10$  to  $h_g = 1$ . The velocity difference between the fluid phase and the granular phase is about  $4V_s$  for  $h_g = 1$  and almost zero for  $h_g = 1/10$  (see the inset of figure 18(a)). The influence of  $h_g$  on the solid volume fraction  $\phi$  is even more dramatic, as shown in figure 18(b). For  $h_g < 2$ , the fluctuations of  $\phi$  are of the same order of magnitude as  $\phi$  itself. Note that the observed oscillations have a period of  $d$ .

Figure 19 presents the constitutive laws of the fluid

phase  $\eta_f(\phi)$ , the granular phase  $\mu_p(K)-\phi(K)$  and the mixture phase  $\eta_m(\phi)$  for  $h_g = d/2, d/4$  and  $d/10$ , respectively (see section IV B for more details and definitions). Results obtained for  $h_g = d$  are also plotted on each graph as reference.

One can see that, as in figure 18(b), fluctuations and dispersion appear when  $h_g$  decreases. Nevertheless, the dispersed data seems to remained centered around the results obtained at large  $h_g$ .

Note also that the rheology of the mixture phase for

$\phi < 0.3$  is well captured even for  $h_g = d/10$ . This part of the rheology correspond to the moving bedload layer of particles. In this flow region, temporal averaging is efficient in reducing spatial fluctuations, furthermore a significant part of the total viscosity come from the fluid which was shown to be less sensitive to the value of  $h_g$ . For  $\phi = 0.3$  and  $h_g = d$ , we obtain a total viscosity of  $2.67\eta_f$  and an apparent viscosity of the fluid phase of  $1.84\eta_f$ , that is almost 70% of the total viscosity comes from the fluid contribution.

- 
- [1] J. S. Bridge, *Rivers and floodplains: forms, processes, and sedimentary record* (John Wiley & Sons, 2009).
  - [2] R. Soulsby, *Dynamics of marine sands* (Thomas Telford, 1997).
  - [3] B. Andreotti, Y. Forterre, and O. Pouliquen, *Les milieux granulaires: Entre fluide et solide* (EDP sciences, 2012).
  - [4] É. Guazzelli and O. Pouliquen, Rheology of dense granular suspensions, *Journal of Fluid Mechanics* **852** (2018).
  - [5] R. Jackson, *The Dynamics of Fluidized Particles* (Cambridge University Press - Cambridge Monographs on Mechanics, 2000).
  - [6] R. Jackson, Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a newtonian fluid, *Chemical Engineering Science* **52**, 2457 (1997).
  - [7] Y. Kim, Z. Cheng, T.-J. Hsu, and J. Chauchat, A numerical study of sheet flow under monochromatic non-breaking waves using a free surface resolving eulerian two-phase flow model, *Journal of Geophysical Research: Oceans* **123**, 4693 (2018).
  - [8] A. Einstein, Eine neue bestimmung der moleklldimensionen (in german), *Ann. Phys. (Leipzig)* **19**, 289 (1906), pour une traduction en anglais.
  - [9] A. Einstein, Correction of the paper 'eine neue bestimmung der moleklldimensionen (1906) (in german)', *Ann. Phys. (Leipzig)* **34**, 591 (1911).
  - [10] G. Batchelor and J. Green, The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ , *Journal of Fluid Mechanics* **56**, 401 (1972).
  - [11] L. Gibilaro, K. Gallucci, R. Di Felice, and P. Pagliai, On the apparent viscosity of a fluidized bed, *Chemical engineering science* **62**, 294 (2007).
  - [12] F. Boyer, E. Guazzelli, and O. Pouliquen, Unifying suspension and granular rheology, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 188301 (2011).
  - [13] M. Trulsson, B. Andreotti, and P. Claudin, Transition from the viscous to inertial regime in dense suspensions, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 118305 (2012).
  - [14] G. Ovarlez, F. Bertrand, and S. Rodts, Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging, *Journal of rheology* **50**, 259 (2006).
  - [15] R. Maurin, J. Chauchat, and P. Frey, Dense granular flow rheology in turbulent bedload transport, *Journal of Fluid Mechanics* **804**, 490512 (2016).
  - [16] B. Bigot, T. Bonometti, L. Lacaze, and O. Thual, A simple immersed-boundary method for solidfluid interaction in constant- and stratified-density flows, *Computers & Fluids* **97**, 126 (2014).
  - [17] J.-L. Pierson and J. Magnaudet, Inertial settling of a sphere through an interface. part 2. sphere and tail dynamics, *Journal of Fluid Mechanics* **835**, 808 (2018).
  - [18] E. Izard, *Modélisation numérique des écoulements granulaires denses immergés dans un fluide*, Ph.D. thesis, Toulouse INP (2014).
  - [19] P. Cundall and O. Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Géotechnique* **29**, 47 (1979).
  - [20] O. Durán, B. Andreotti, and P. Claudin, Numerical simulation of turbulent sediment transport, from bed load to saltation, *Physics of Fluids* **24**, 103306 (2012).
  - [21] J.-L. Pierson, *Traversée d'une interface entre deux fluides par une sphère*, Ph.D. thesis (2015).
  - [22] Y. Yuki, S. Takeuchi, and T. Kajishima, Efficient Immersed Boundary Method for Strong Interaction Problem of Arbitrary Shape Object with the Self-Induced Flow, *Journal of Fluid Science and Technology* **2**, 1 (2007).
  - [23] I. Calmet, *Analyse par simulation des grandes échelles des mouvements turbulents et du transfert de masse sous une interface plane*, Ph.D. thesis, Toulouse INP (1995).
  - [24] T. Ikeno and T. Kajishima, Finite-difference immersed boundary method consistent with wall conditions for incompressible turbulent flow simulations, *Journal of Computational Physics* **226**, 1485 (2007).
  - [25] J. Schäfer, S. Dippel, and D. Wolf, Force schemes in simulations of granular materials, *Journal de Physique I France* **6**, 520 (1996).
  - [26] X. Fang, J. Tang, and H. Luo, Granular damping analysis using an improved discrete element approach, *Journal of Sound and Vibration* **308**, 112 (2007).
  - [27] F. Da Cruz, S. Emam, M. Prochnow, J.-N. Roux, and F. m. c. Chevoir, Rheophysics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows, *Phys. Rev. E* **72**, 021309 (2005).
  - [28] O. Baran, D. Ertas, T. C. Halsey, G. S. Grest, and J. B. Lechman, Velocity correlations in dense gravity-driven granular chute flow, *Phys. Rev. E* **74**, 051302 (2006).
  - [29] C. W. Gear, *Numerical initial value problems in ordinary differential equations* (Prentice Hall PTR, 1971).
  - [30] M. P. Allen and D. J. Tildesley, *Computer simulation of liquids* (Oxford university press, 1987).
  - [31] T. Pöschel and T. Schwager, *Computational granular dynamics: models and algorithms* (Springer Science & Business Media, 2005).
  - [32] E. Izard, T. Bonometti, and L. Lacaze, Modelling the dynamics of a sphere approaching and bouncing on a wall in a viscous fluid, *Journal of Fluid Mechanics* **747**,

- 422 (2014).
- [33] E. Izard, T. Bonometti, and L. Lacaze, Resolved simulations of submarine avalanches with a simple soft-sphere / immersed boundary method, *Journal of Computational Multiphase Flows* (2014).
  - [34] I. M. Krieger and T. J. Dougherty, A mechanism for non-newtonian flow in suspensions of rigid spheres, *Transactions of the Society of Rheology* **3**, 137 (1959).
  - [35] GDR MiDi, On dense granular flows, *The European Physical Journal E* **14**, 341 (2004).
  - [36] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen, A constitutive law for dense granular flows, *Nature* **441**, 727 (2006).
  - [37] C. Cassar, M. Nicolas, and O. Pouliquen, Submarine granular flows down inclined planes, *Physics of fluids* **17**, 103301 (2005).
  - [38] L. Lacaze, J. Bouteloup, B. Fry, and E. Izard, Immersed granular collapse: From viscous to inertial unsteady granular flows (2020), in revision.
  - [39] H. Brinkman, A calculation of the viscosity and the sedimentation constant for solutions of large chain molecules taking into account the hampered flow of the solvent through these molecules, *Physica* **13**, 447 (1947).
  - [40] M. Ouriemi, P. Aussillous, and E. Guazzelli, Sediment dynamics. part 1. bed-load transport by laminar shearing flows, *Journal of Fluid Mechanics* **636**, 295 (2009).

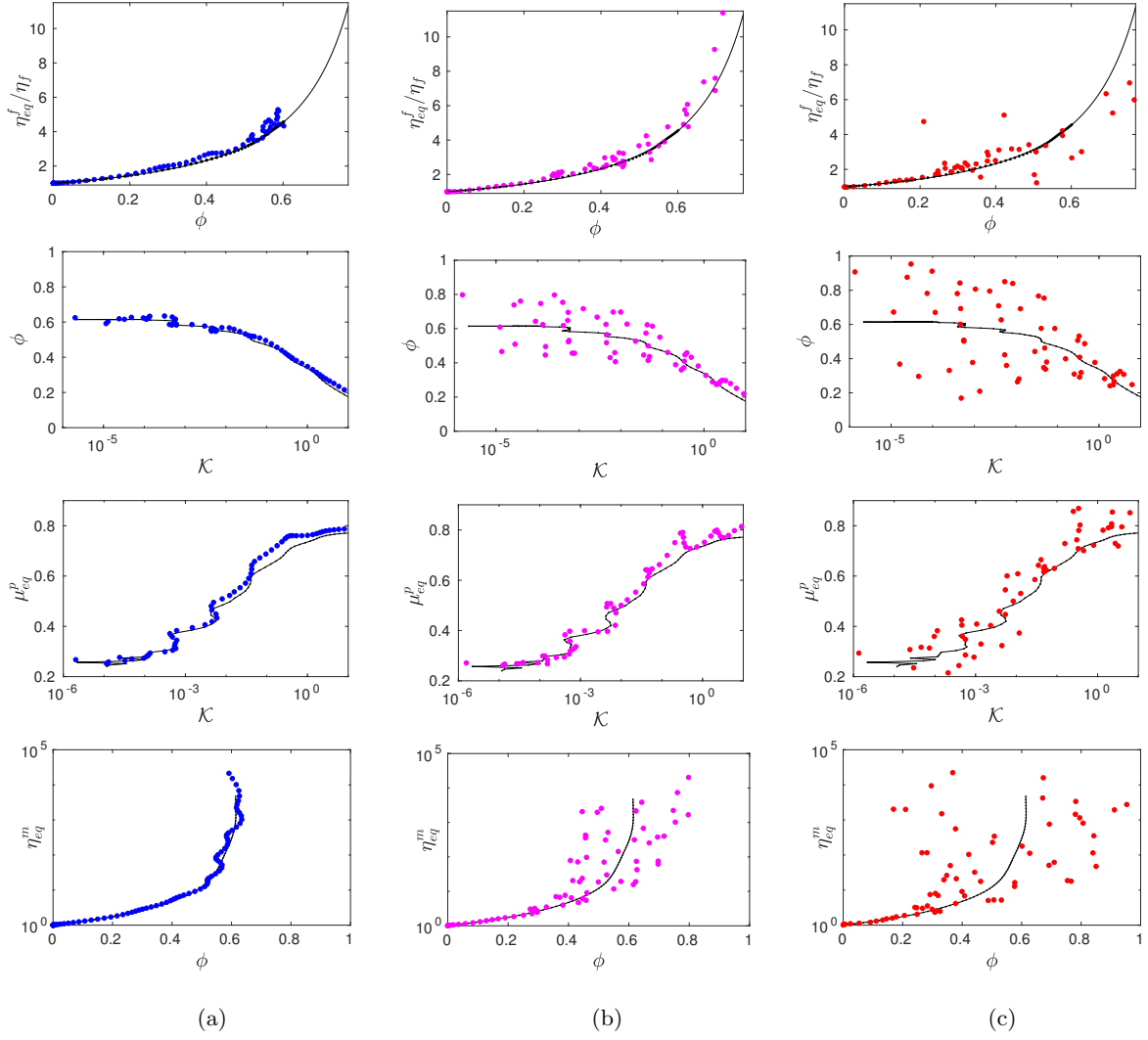


FIG. 19. Apparent rheology of the mesoscopic fluid phase (top row), granular phase (second and third rows) and mixture phase (bottom row): (a, blue),  $h_g = d/2$ , (b, magenta),  $h_g = d/4$ ; (c, red),  $h_g = d/10$ . Results for  $h_g = d$  are also plotted as reference (black). For the apparent viscosity of the fluid phase, the model  $\eta_{eq}^f/\eta_f = (1 - \phi)^{-1.65}$  is also plotted (solid black line).

## 5.3 De l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique

La description par une phase de mélange donne des résultats tout à fait pertinent (voir chapitre 4). On peut également noter que les équations dites mésoscopiques sont valides lorsqu'on vérifie les hypothèses de séparation d'échelles (taille des grains petite devant toutes les échelles caractéristiques mésoscopiques). Dans le cas où l'on souhaite décrire le transport par charriage à l'échelle mésoscopique, on suppose donc que l'épaisseur de la couche de grains charriés est grande devant la taille des grains. Or, on a vu dans le chapitre 4 que ce n'était pas le cas proche du seuil de mise en mouvement. La possibilité d'ainsi décrire l'écoulement considéré n'est donc *a priori* pas acquise. On peut également noter des difficultés proche de la surface du lit de grains (transition singulière) où la séparation des échelles ne semble pas évidente. Ceci montre l'intérêt d'une approche macroscopique séparant les système en une solution extérieure et une solution poreuse avec une transition basée sur une interface effective (MEI et VERNESCU (2010) et ZAMPOGNA et BOTTARO (2016)).

Nous proposons alors de séparer les deux régions, fluide et milieu granulaire immergée, et de définir une condition d'interface les séparant. Cette approche permet d'anticiper les modèles à grandes échelles (échelle macroscopique) qui résolvent la phase fluide et dans lesquelles la position supérieure du lit de grains est considérée comme condition limite. Ainsi, l'épaisseur de la couche mobile du lit de grains se voit assimilée une singularité et c'est en fait un des avantage de cette approche. En effet, la question de la séparation d'échelles qui n'est pas bien vérifiée dans cette région n'a donc plus lieu d'être, quelque soit l'épaisseur de la couche de grains mobiles, aussi faible soit-elle. Cette démarche peut être vue comme une méthode d'homogénéisation dans laquelle le volume élémentaire représentatif englobe l'interface considéré afin de la ramené à un point (de mesure nulle) du point de vue macroscopique (BOTTARO (2019)).

### 5.3.1 Homogénéisation de la transition fluide - milieux granulaire immergé

On considère un volume élémentaire représentatif (VER) traversant la couche de grains mobiles. La longueur de ce volume doit être assez grande pour pouvoir supposer que le comportement est périodique en  $x$  (le sens de l'écoulement) avec une période égale à l'épaisseur du VER. On suppose aussi le milieu comme infini dans la direction  $z$ ; le problème considéré étant invariant dans cette direction, on cherche à le résoudre en deux dimensions (suivant  $x$  et  $y$ ).

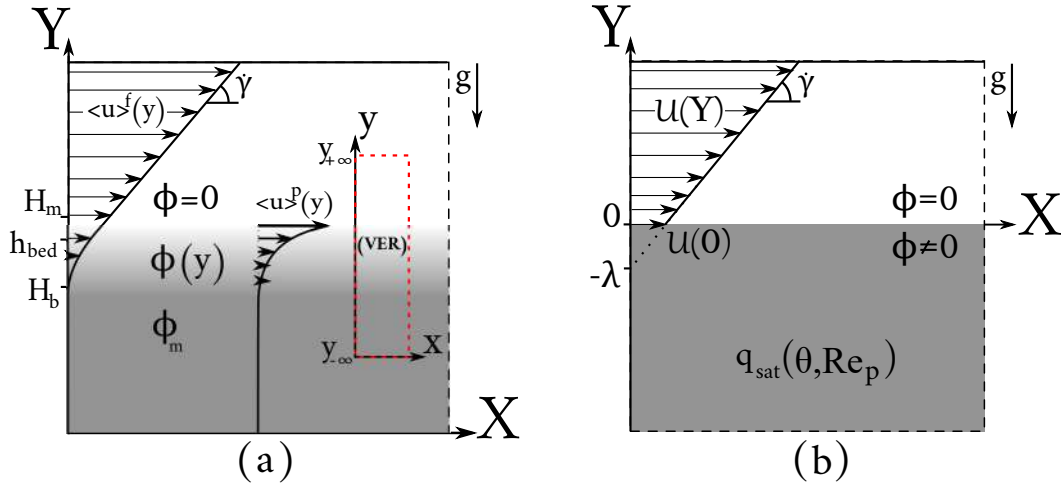
On note  $L$  la taille caractéristique de description de l'écoulement à l'échelle macroscopique et  $l$  celle de l'échelle mésoscopique (jouant désormais le rôle de la petite échelle). L'hypothèse de séparation d'échelles implique que le rapport  $\xi = l/L$  vérifie  $\xi \ll 1$ . On adopte ensuite une description à deux variables d'espaces non dimensionnelles  $(\mathbf{X}, \mathbf{x})$ , où  $\mathbf{X} = (X, Y) = \mathbf{r}/L$  est une variable macroscopique et  $\mathbf{x} = (x, y) = \mathbf{r}/l$  une variable mésoscopique (où  $\mathbf{r}$  représente le vecteur position dimensionnel). Ces deux variables d'espace sont donc liées par la relation :

$$\mathbf{X} = \xi \mathbf{x}. \quad (5.62)$$

De façon générale, on notera en majuscule les quantités macroscopiques et en minuscules les quantités mésoscopiques. Ainsi, la vitesse dans le sens de l'écoulement sera notée  $u$  (où  $u = \langle u_x \rangle^m$ ) à l'échelle mésoscopique et la vitesse à l'échelle macroscopique sera noté  $\mathcal{U}$ . La vitesse verticale sera notée  $v$  à l'échelle mésoscopique. Dans cette partie, toutes les grandeurs sont non-dimensionnelles. Les échelles de vitesses macroscopique  $U_0$  et mésoscopique  $u_0$  ne sont pas les mêmes mais sont reliées par la relation  $u_0 = \xi U_0$ .

On note  $y_{\pm\infty}$  les positions du haut et du bas du VER, l'origine de l'axe des ordonnées étant prise en  $y = H_m$  (la hauteur maximale de la couche de grains mobiles). En  $y = y_{+\infty}$ , l'écoulement n'est plus perturbé par la présence du lit de grains et donc  $\frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\gamma}$  et  $v = 0$ . En  $y = y_{-\infty}$ , on suppose qu'il n'y a

plus d'écoulement  $u = v = 0$ , où  $u$  et  $v$  sont respectivement les vitesses (mésoscopiques) de la phase de mélange dans le sens de l'écoulement et dans la direction verticale. La figure 5.25 schématise le problème aux deux échelles considérées et rappelle les notations utilisées.



**FIGURE 5.25** – Schéma représentant le problème d'un écoulement granulaire cisailé à l'échelle mésoscopique (a) et à l'échelle macroscopique (b).

De la même façon qu'à la section 5.1, les propriétés effectives à la grande échelle sont obtenues en moyennant les grandeurs utilisées à l'échelle inférieure, sur le volume du VER. Le VER est alors réduit à une singularité, du point de vue macroscopique ; ici cette singularité correspond à l'interface entre les milieux granulaire et fluide. L'objectif de cette partie est d'obtenir la "relation de saut" suivie par le champ de vitesse macroscopique à la traversée de l'interface du lit de grains. Cette relation peut alors servir de condition limite pour une résolution à l'échelle macroscopique du problème considéré.

La phase de mélange possède une viscosité apparente  $\eta_{eq}^m$  qui est une fonction croissante de  $\phi$  (voir figure 5.23). La viscosité apparente est donc constante et maximale dans le lit statique, elle est minimale dans le fluide pur (et prend alors la valeur de la viscosité dynamique du fluide  $\eta_f$ ) et elle varie, d'une de ces valeurs à l'autre, dans la couche de grains mobiles. Ici, on notera cette viscosité apparente  $\eta$  afin d'alléger les notations. On fait l'hypothèse que la viscosité apparente de la phase de mélange est tellement grande dans la zone statique du lit qu'on peut faire l'approximation que  $1/\eta \simeq 0$  dans cette partie du lit.

La phase de mélange vérifie l'équation (5.26) et on a montré que le terme inertiel était négligeable ici. Dans ce cas, l'écoulement est alors régi par l'équation de Stokes :

$$0 = \nabla \cdot \Sigma^{tot} = -\nabla(\hat{p}) + \nabla \cdot (\eta \nabla(\mathbf{u})), \quad (5.63)$$

où  $\hat{p}$  représente la pression à laquelle on a déjà retranché la pression hydrostatique (c'est pour cela le poids n'apparaît pas dans l'équation (5.63)). Les équations (5.11) et (5.12) nous indiquent que l'écoulement de la phase de mélange est incompressible et donc qu'elle vérifie l'équation :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (5.64)$$

Finalement, en utilisant la notation indicielle ( $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  et  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ) et la convention de sommation d'Einstein, l'écoulement est régi à l'échelle mésoscopique par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, & (a) \\ 0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), & (b) \\ \text{en } y = y_{+\infty}, & \frac{\partial u}{\partial y} = \dot{\gamma}(X_i), \quad v = 0, \quad (c) \\ \text{en } y = y_{-\infty}, & u = 0, \quad v = 0, \quad (d) \\ \text{périodicité en } x, & \text{de période } l. \quad (e) \end{array} \right. \quad (5.65)$$

On note  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}(X_i)$  car il s'agit du forçage imposé à l'échelle macroscopique.  $l$  représente la longueur nécessaire à la convergence des statistiques à l'échelle mésoscopique. On peut alors considérer que le problème est périodique de période  $l$ , bien que cette "période" n'en soit pas vraiment une. Le système peut être considéré comme invariant par translation selon  $x$  si sa longueur est au moins égale à  $l$ .

Afin de dériver la condition limite, à l'échelle macroscopique, correspondant à l'écoulement mésoscopique, on multiplie l'équation (5.65) (a) par une quantité scalaire que l'on note  $\hat{p}^+$  et on effectue le produit scalaire de l'équation (5.65) (b) avec une autre quantité, vectorielle,  $u^+$  puis on additionne ces équations. On intègre finalement cette nouvelle équation sur le volume du VER. On obtient alors l'équation suivante :

$$0 = \int_{VER} \left( \hat{p}^+ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - u_i^+ \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + u_i^+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right) dV. \quad (5.66)$$

On effectue ensuite des intégrations par parties ; une pour chacun des deux premiers termes et deux pour le troisième et dernier terme de cette intégrale. Il vient alors :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{VER} \frac{\partial u_i^+}{\partial x_i} \hat{p} + \left( -\frac{\partial \hat{p}^+}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j} \right) \right) u_i dV \\ & + \int_x^{x+l} \left( [\hat{p}^+ v]_{y_{-\infty}}^{y_{+\infty}} - [v^+ \hat{p}]_{y_{-\infty}}^{y_{+\infty}} + \left[ u_i^+ \eta \frac{\partial u_i}{\partial y} \right]_{y_{-\infty}}^{y_{+\infty}} - \left[ \frac{\partial u_i^+}{\partial y} \eta u_i \right]_{y_{-\infty}}^{y_{+\infty}} \right) dx \\ & + \int_{y_{-\infty}}^{y_{+\infty}} \left( [\hat{p}^+ u]_x^{x+l} - [u^+ \hat{p}]_x^{x+l} + \left[ u_i^+ \eta \frac{\partial u_i}{\partial x} \right]_x^{x+l} - \left[ \frac{\partial u_i^+}{\partial x} \eta u_i \right]_x^{x+l} \right) dy. \end{aligned} \quad (5.67)$$

On définit désormais le problème adjoint du système (5.65), dont les inconnues sont  $\hat{p}^+$  et les  $u_i^+$ , afin de simplifier au maximum l'équation (5.67). Ce système est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 = \frac{\partial u_i^+}{\partial x_i}, & (a) \\ 0 = -\frac{\partial \hat{p}^+}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \eta \frac{\partial u_i^+}{\partial x_j} \right), & (b) \\ \text{en } y = y_{+\infty}, & \frac{\partial u^+}{\partial y} = 1, \quad v^+ = 0, \quad (c) \\ \text{en } y = y_{-\infty}, & u^+ = 0, \quad v^+ = 0, \quad (d) \\ \text{périodicité en } x, & \text{de période } l. \quad (e) \end{array} \right. \quad (5.68)$$

L'intégrale sur la première ligne de l'équation (5.67) est nulle d'après les équations (5.68) (a) et (5.68) (b). Les conditions limites sur  $u$  et  $v$  font que les deux premiers termes de l'intégrale sur  $x$  sont nuls.



Les conditions limites, sur  $u$  et  $u^+$  en  $y = y_{-\infty}$ , permettent également d'annuler les termes correspondant à cette ordonnée restant dans cette intégrale. Finalement, tous les termes de la troisième intégrale sont nuls car le problème considéré est périodique en  $x$ , de période  $l$ . La relation (5.67) se résume donc à :

$$\int_x^{x+l} \left( \frac{\partial u^+}{\partial y} \eta u \right) (y_{+\infty}) dx = \int_x^{x+l} \left( u^+ \eta \frac{\partial u}{\partial y} \right) (y_{+\infty}) dx. \quad (5.69)$$

On note  $u^+(y_{+\infty}) = u_{\infty}^+$  et à l'aide des conditions limites que l'on n'a pas encore utilisées, on peut réécrire l'égalité (5.69) :

$$\int_x^{x+l} u(y_{+\infty}) dx = u_{\infty}^+ \int_x^{x+l} \left( \frac{\partial u}{\partial y} (y_{+\infty}) \right) dx. \quad (5.70)$$

En multipliant cette relation par  $1/L$  et en utilisant les relations entre les vitesses et positions aux échelles macroscopique et mésoscopique, on obtient alors :

$$\xi \int_x^{x+l} u(y_{+\infty}) dx = \mathcal{U}(Y_{+\infty}) = \xi u_{\infty}^+ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(Y_{+\infty}). \quad (5.71)$$

On effectue ensuite des développements limités de  $\mathcal{U}$  et  $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}$  en 0 :

$$\mathcal{U}(Y_{+\infty}) = \mathcal{U}(0) + \xi y_{+\infty} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(0) + \mathcal{O}(\xi^2), \quad (5.72)$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(Y_{+\infty}) = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(0) + \mathcal{O}(\xi). \quad (5.73)$$

On injecte ces développements dans la relation (5.71) et on obtient enfin la condition limite pour l'échelle macroscopique qui est équivalente (à cette échelle) à l'écoulement mésoscopique considéré :

$$\mathcal{U}(0) = \xi (u_{\infty}^+ - y_{+\infty}) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(0) = \lambda_a \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial Y}(0), \quad (5.74)$$

où  $\lambda_a = \xi (u_{\infty}^+ - y_{+\infty})$  correspond à une longueur de glissement (calculée via la méthode adjointe présentée ci-dessus). La condition limite, du point de vue macroscopique, d'un écoulement cisailé sur un lit de grains est donc une condition classique de NAVIER (1823), permettant un glissement du fluide au niveau de l'interface fluide-grains. Le schéma 5.25 (b) illustre cette condition limite, du point de vue macroscopique.

Il ne reste plus qu'à exprimer  $u_{\infty}^+$  afin de pouvoir calculer la longueur de glissement  $\lambda_a$ . Pour cela, on repart du système (5.68) en considérant le système invariant dans la direction  $x$  (à l'échelle mésoscopique). L'équation (5.68) (a) nous donne  $v^+ = 0$ , la (b) mène alors à une pression  $\hat{p}^+$  constante et à un produit  $\eta \frac{\partial u^+}{\partial y} = A$  qui est également constant par rapport à  $y$ . Les conditions limites en  $y = y_{+\infty}$  permettent de déterminer la valeur de la constante,  $A = 1$ . On obtient alors l'équation différentielle vérifiée par  $u^+$  :  $\frac{\partial u^+}{\partial y} = \frac{1}{\eta}$ . En intégrant cette équation entre  $y_{-\infty}$  et  $y_{+\infty}$ , on obtient finalement l'expression de la longueur de glissement  $\lambda$  :

$$\lambda_a = \xi \left( \int_{y_{-\infty}}^{y_{+\infty}} \frac{1}{\eta} dy - y_{+\infty} \right). \quad (5.75)$$

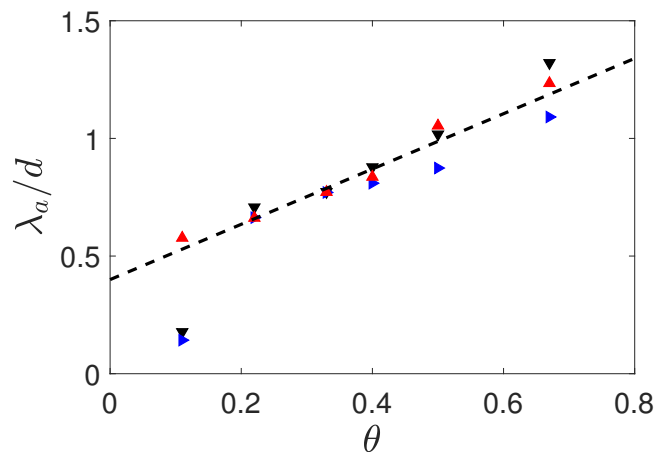
Finalement, on a réussi à réduire la dynamique de la couche mobile à une condition limite, équivalente du point de vue macroscopique. Cette condition limite permet un certain glissement du fluide à l'interface fluide - grains. De plus, on a l'expression de la longueur de glissement  $\lambda_a$ , calculable à l'échelle mésoscopique (voir le schéma 5.25 (b)). Le choix d'utiliser  $H_m$  comme origine permet de n'avoir que des longueurs de glissement  $\lambda_a$  positives.

### 5.3.2 Condition limite équivalente

Dans notre cas, on utilise les champs mésoscopiques obtenus pour  $h_g = d$  car cette approche donne des solutions pour la viscosité effective suffisamment lisses pour ne pas avoir de problème en intégrant  $1/\eta$ . On prend  $y_{\pm\infty}$  comme étant les bords du domaine de simulation. On ne prend pas en compte les zones où des effets de bords de la méthode d'homogénéisation entre les échelles microscopique et mésoscopique se font ressentir. On a vérifié que les valeurs obtenues ne dépendaient plus de  $y_{\pm\infty}$  lorsque ces positions étaient suffisamment éloignées du lit de grains mobile. En pratique, on prend  $y_{\pm\infty} = \pm 8d = \pm L$ . Pour les intégrales selon l'axe des  $x$ , on considère que la longueur du domaine  $L_x$  est assez grande pour poser  $l = L_x = 4d$  (en fait, on a fait cette hypothèse pour passer de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique, mais ici les quantités mésoscopique ne dépendent déjà que de la coordonnée  $y$ ). Finalement, ici  $\xi = \frac{l}{L} = \frac{1}{2}$ . On peut noter que cette valeur de  $\xi$  n'est pas très petite devant 1 mais malgré cela, les résultats obtenus sont encourageants.

En fait, la détermination du rapport d'échelle  $\xi$  n'est pas si évidente. En effet, la grande échelle  $L$  est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche mobile  $\Delta H$  et la petite échelle  $l$  est de l'ordre de grandeur du libre parcours moyen des grains dans le haut de la couche mobile de grains. Ces deux longueurs sont relativement difficiles à déterminer et dépendent (au moins) du nombre de Shields  $\theta$ ; cependant elles sont toutes deux croissantes avec  $\theta$ . On peut donc supposer, en première approximation, que  $\xi$  est constant (ce qui revient à considérer que le libre parcours moyen des grains augmente linéairement avec  $\theta$ , comme  $\Delta H$ ). On utilisera donc uniquement la valeur  $\xi = \frac{1}{2}$  par la suite.

La figure 5.26 présente l'évolution de la longueur de glissement  $\lambda_a$ , obtenue via la méthode développée ci-dessus, avec le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  et le nombre de Shields  $\theta$ .



**FIGURE 5.26** – Longueur de glissement  $\lambda_a$ , adimensionnée par le diamètre des grains  $d$ , en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ ; ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$ ; ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ . (–) : ajustement linéaire (équation (5.76)).

On observe sur la figure 5.26 que la longueur de glissement  $\lambda_a$  est une fonction croissante du nombre de Shields  $\theta$  et semble être relativement indépendante du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$ . Pour

les cas au-dessus du seuil de mise en mouvement du lit de grains, la longueur de glissement  $\lambda_a$  obtenue est bien approchée par une droite et un ajustement de nos données donne :

$$\frac{\lambda_a}{d} = 0.40 + 1.18 \theta. \quad (5.76)$$

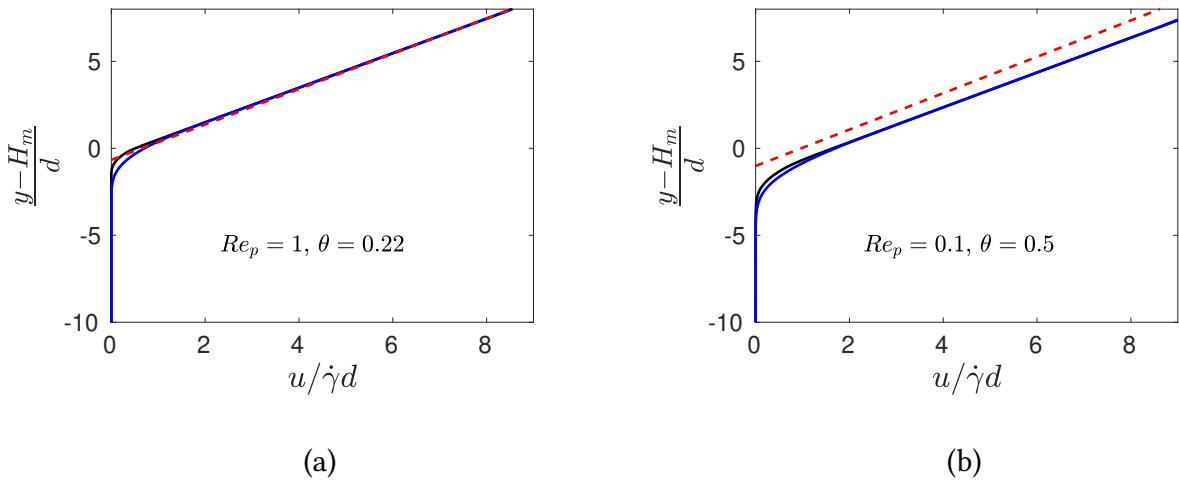
Pour les deux cas sous le seuil de mise en mouvement, la longueur de glissement  $\lambda_a$  prend des valeurs plus faibles,  $\lambda_a \simeq 0.15d$ , et semble aussi être indépendante du nombre de Reynolds. On peut alors exprimer la fonction  $\lambda_a(\theta)$ , pour  $\theta \leq 0.7$  et  $Re_p \leq 10$  par :

$$\frac{\lambda_a}{d} = \begin{cases} 0.40 + 1.18 \theta & \text{si } \theta \geq \theta_c, \\ 0.15 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.77)$$

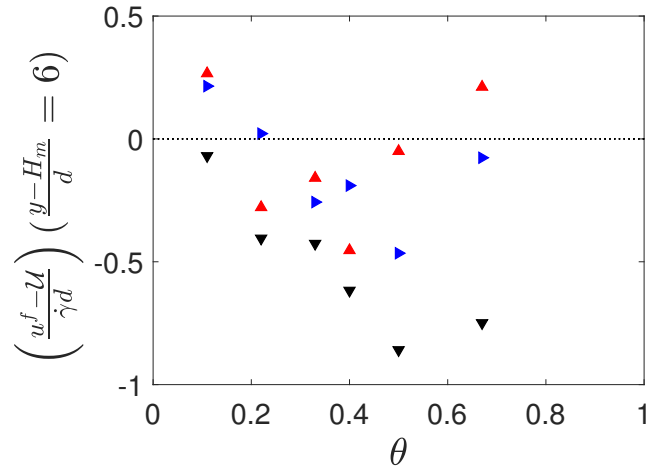
où  $\theta_c \simeq 0.12$  est le seuil de mise en mouvement du lit de grains. Pour illustrer la pertinence de ce second changement d'échelle, on trace sur la figure 5.27 la vitesse de la phase fluide aux échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique. On trace sur la figure 5.27 ces vitesses pour les deux couples  $(Re_p, \theta)$  pour lesquels l'erreur est la plus grande ( $Re_p = 0.1, \theta = 0.5$ , figure 5.27 (b)) et la plus faible ( $Re_p = 1, \theta = 0.22$ , figure 5.27 (a)) parmi les 18 couples disponibles. On peut voir sur ces figures que le cisaillement obtenu à l'échelle macroscopique est le bon, celui du fluide loin du lit de grains. Il subsiste un décalage, même loin du lit de grains, entre les descriptions macroscopique et mésoscopiques. On peut compter cet écart sur l'axe verticale (c'est l'écart sur  $\lambda_a$ ) ou sur l'axe horizontale (on mesure alors un écart de vitesse).

On s'intéresse ensuite à ce qu'il se passe proche du lit de grains. Pour la description macroscopique, le taux de cisaillement est constant jusqu'au bord du domaine considéré où la condition limite sur la vitesse est imposée (ici, il le profil de vitesse est prolongé en dehors du domaine fluide, repéré par  $Y \geq 0$ , jusqu'à  $Y = -\lambda_a$ , là où il s'annule). Pour les descriptions aux plus petites échelles, la vitesse passe continûment d'un taux de cisaillement constant au-dessus du lit à une vitesse nulle dans le lit ; et plus l'échelle de description est petite, plus cette transition est rapide.

On estime l'erreur en mesurant l'écart entre la vitesse macroscopique  $\mathcal{U}$  et la vitesse microscopique  $u^f$  loin du lit de grains, à une hauteur  $\frac{y-H_m}{d} \simeq 6d$  (si on se place suffisamment loin du lit de grains, cet écart est constant). La figure 5.28 présente l'évolution de cette erreur en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour les trois valeurs du nombre de Reynolds  $Re_p$  considérées.



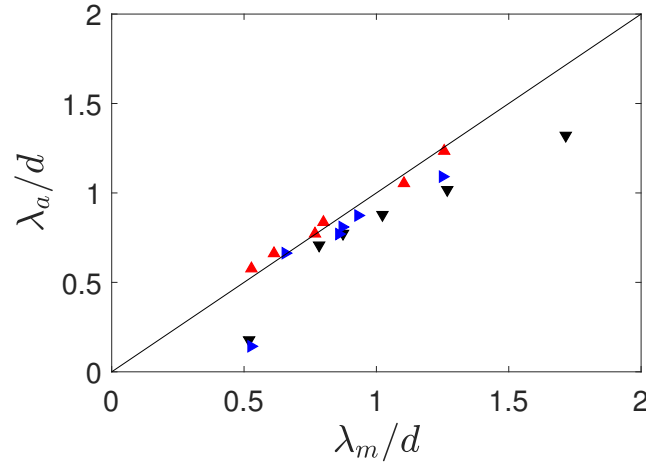
**FIGURE 5.27** – Profils verticaux de la vitesse du fluide dans le sens de l'écoulement, adimensionné par  $\dot{\gamma}d$ , (noir -) : à l'échelle microscopique ( $u^f$ ); (bleu -) : à l'échelle mésoscopique ( $\langle u_x \rangle^f$ ); (rouge - -) : à l'échelle macroscopique ( $\mathcal{U}$ ). (a) :  $Re_p = 1, \theta = 0.22$  (écart minimum observé entre  $\mathcal{U}$  et  $u^f$ ); (b) :  $Re_p = 0.1, \theta = 0.5$  (écart maximum observé entre  $\mathcal{U}$  et  $u^f$ ).



**FIGURE 5.28** – Écart de entre les vitesses microscopique  $u^f$  et macroscopique  $U$ , adimensionné par  $\dot{\gamma}d$ , en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour (▼) :  $Re_p = 0.1$ ; (►) :  $Re_p = 1$ ; (▲) :  $Re_p = 10$ .

La figure 5.28 montre que pour la gamme de paramètres sans dimension testés, l'écart entre les champs de vitesse macroscopique et microscopique reste inférieur à  $\dot{\gamma}d$ . Cela signifie qu'au pire à une dizaine de diamètres de la surface du lit de grains, l'écart entre la solution réelle et la solution macroscopique ne représente plus que 10% d'erreur, 20d au-dessus du lit elle n'est plus que de 5%, etc; il s'agit d'un majorant de l'erreur, elle peut aussi être beaucoup plus faible. Au minimum, on a mesuré une erreur 30 fois plus faible que ce majorant ici (pour  $Re_p = 1$  et  $\theta = 0.22$ ). Cette faible erreur du point de vue macroscopique correspond bien au fait que la longueur de glissement est une correction (au premier ordre en  $\xi$ ) de la condition limite habituelle qui suppose qu'il y a adhérence du fluide. L'erreur mesurée ici ne semble pas dépendre de  $Re_p$  ou  $\theta$ . On peut remarquer qu'une erreur de  $\dot{\gamma}d$  sur la vitesse correspond à une erreur de  $d$  sur  $\lambda_a$ . Or, à l'échelle macroscopique un grain est censé posséder une taille infinitésimale, à l'instar des molécules dans un fluide décrit de façon continue et où l'hypothèse de séparation d'échelles est bien vérifiée. La taille  $d$  est la limite basse de précision que l'on peut espérer *a priori*.

On peut aussi comparer ces longueurs de glissement adjointes  $\lambda_a$  à une autre longueur de glissement, qui elle est mesurée en prolongeant linéairement les champs de vitesse microscopiques  $u^f$ , et qu'on appellera  $\lambda_m$ . On a tracé  $\lambda_a$  en fonction de  $\lambda_m$  sur la figure 5.29. Pour un nombre de Shields donné, lorsque ces deux longueurs de glissement sont égales, le point correspondant se trouve sur la droite d'équation  $y = x$  et si  $\lambda_a > \lambda_m$  (ou  $\lambda_a < \lambda_m$ ) le point est au-dessus (en dessous) de cette droite.



**FIGURE 5.29** –  $\lambda_a$  en fonction de  $\lambda_m$  pour tous les nombres de Shields  $\theta$  testés et pour ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$ ; ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$ ; ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ .

On constate un très bon accord pour  $Re_p = 10$ , ce qui est plutôt surprenant compte tenu de l'hypothèse faite pour calculer  $\lambda_a$  (système décrit par l'équation de Stokes). On observe aussi que, de façon générale,  $\lambda_m > \lambda_a$  et ce d'autant plus que le nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  est faible. Ces résultats sont toutefois difficilement interprétables à cause de la grosse hypothèse faite sur le rapport d'échelles  $\xi$ , qui est considéré constant égal à  $1/2$  ici.

Pour conclure, on a réussi à réduire le problème d'un lit de grains cisailé à une condition limite pour le fluide, du point de vue macroscopique. La figure 5.27 montre que l'utilisation de cette condition limite, au lieu de la résolution numérique en 3D de l'écoulement, n'a qu'un faible impact dès que l'on s'éloigne un petit peu du lit de grains. La différence de coût en temps de calcul justifie pleinement l'utilisation de cette condition limite pour un grand nombre d'écoulements. Il suffit de connaître l'expression de  $\lambda_a(\theta)$  et de  $H_m(\theta, Re_p)$  (ou de  $(H_m - h_{bed})(\theta)$  et de  $h_{bed}(Re_p)$ ) afin de pouvoir résoudre l'écoulement stationnaire du fluide au-dessus du lit de grains dans une bonne approximation dès que l'on se situe assez loin du lit de grains. On peut aussi ajouter la relation  $q_{sat}(\theta, Re_p)$  si le transport de sédiment est d'intérêt.



# Chapitre 6

## Conclusion & perspectives

Cette thèse avait pour objectif l'étude d'un lit de grains (sphériques et mono-disperses) cisailé par un fluide visqueux au travers d'expériences numériques, ainsi que l'étude du changement d'échelle de description de cet écoulement ; de l'échelle microscopique, où l'on décrit chaque particule individuellement et que l'on résout l'écoulement autour de chaque particules, à l'échelle mésoscopique, où les phases fluide et granulaire sont décrites via des phases équivalentes continues. Puis jusqu'à l'échelle macroscopique où l'écoulement des grains en surface du lit est ramené à une singularité qui sert alors de condition limite pour la phase fluide.

**Chapitre 2** On a résolu la dynamique des particules à l'aide d'un code de calcul basé sur la méthode des éléments discrets (GraDyM), et la dynamique du fluide par les équations de Navier-Stokes à l'aide du code basé sur la méthode des volumes finis (JADIM). La présence des particules a été prise en compte par le solveur fluide via une méthode de frontières immergées. Cette méthode de résolution à l'avantage de résoudre toutes les échelles mises en jeu par l'écoulement considéré (à l'exception des effets de lubrification) mais la contre-partie est un coût non négligeable en temps de calcul nous limitant à un faible nombre de particules et à un domaine de taille relativement faible.

Des tests de performances de cette approche (rotation d'un cylindre par cisaillement fluide ; sédimentation d'une sphère ; écoulement cisailé autour d'une sphère proche d'une paroi ; écoulement dans un milieu poreux) ont montré qu'il faut le plus souvent que le maillage possède un grand nombre de mailles par diamètre de grain pour que les résultats convergent. Toutefois, cette méthode permet généralement d'obtenir des erreurs raisonnables ( $\leq 10\%$ ) pour un coût relativement restreint ( $d/\Delta x = 10$  où  $d$  est le diamètre des grains et  $\Delta x$  la taille caractéristique des cellules de calcul). De plus, les écarts avec les valeurs attendues sont le plus souvent interprétables, et ont donc un sens physique, en considérant que les particules simulées possèdent des rugosités dont la taille  $k_e$  est de l'ordre de l'épaisseur  $\Delta$  des frontières immergées ( $k_e \sim \Delta \sim 3\Delta x$ ).

**Chapitre 3** On simule ensuite des écoulements de Couette d'un lit de grains immergés dans un fluide visqueux. Les simulations sont effectuées avec des domaines de taille modeste ( $4d \times 20d \times 4d$ ) mais l'étude de convergence des résultats a montré que la prise de moyenne temporelle permet de compenser la faible extension spatiale, à l'exception de la zone statique du lit de grains. On a notamment observé un comportement d'auto-organisation du lit de grains vers un état critique caractérisé par une absence d'échelle caractéristique. Différentes échelles temporelles de fluctuations ont été observées (notamment dans le signal d'évolution temporelle du débit granulaire) et traduisent respectivement les phénomènes de réorganisation du lit granulaire, les chocs entre grains et la propagation d'onde élastique inhérente à la méthode DEM.

**Chapitre 4** L'étude en régime stationnaire nous a permis de retrouver un certain nombre de résultats de la littérature, comme la variation en  $\theta^3$  du débit granulaire adimensionné par  $V_s d$ . Les résultats présentés montrent une dépendance relativement forte au nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  du débit granulaire, là où les études préexistantes ne montraient qu'une dépendance relativement faible à ce paramètre.

De nombreuses définitions de la hauteur du lit de grains ont été considérées. Il semble que la hauteur  $h_{bed}$  (équation (4.23)), proposée par DURÁN *et al.* (2012), soit un bon candidat car sa dépendance au nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  permet la superposition des courbes  $H_m(\theta)$  et  $H_b(\theta)$  pour tous les  $Re_p$  lorsqu'on l'utilise comme origine. Pour définir l'altitude du bas de la couche de grains mobiles, et ainsi définir l'épaisseur de cette dernière, nous n'avons pas trouvé de candidat idéal. Dans certains cas, il a fallu en corriger la valeur à la main (en s'appuyant sur les profils de vitesse moyens). Ce problème serait sans doute limité pour un domaine de simulation plus grand horizontalement. On peut tout de même noter que l'utilisation d'un seuil de vitesse basé sur  $\theta^2 V_s$  semble plus adapté qu'un seuil basé sur la vitesse de Stokes  $V_s$ . La définition de l'épaisseur caractéristique de la couche de grains mobiles  $\delta h$ , proposée par DURÁN *et al.* (2012), bien qu'élégante, ne semble pas être la plus adaptée. Cette longueur, qui varie en  $\theta^2$ , n'est pas équivalente aux autres épaisseurs caractéristiques que l'on peut construire et qui varient linéairement avec  $\theta$ .

On a normalisé les profils moyens de vitesse des grains dans la couche de grains mobiles par  $\theta^2 V_s$  et on a ainsi pu tous superposés sous une courbe "universelle" variant comme  $(y/\Delta H)^3$ . Cependant, le modèle de MOUILLERON *et al.* (2009) prédit une variation en  $(y/\Delta H)^2$  et nous n'avons pas réussi à trouver d'explication pour cet exposant. On peut également noter que les échelles caractéristiques pour la vitesse moyenne dans le sens de l'écoulement ( $U_0 = \theta^2 V_s = \theta \dot{\gamma} d$ ) et pour la dispersion des vitesses perpendiculaires à l'écoulement ( $\delta_0 = \theta V_s = \dot{\gamma} d$ ) sont différentes.

On a également considéré la question de la définition d'une vitesse moyenne des particules mobiles et surtout l'importance de bien la définir car sa valeur dépend fortement de la définition choisie. La vitesse moyenne définie via les distributions de probabilité à l'avantage d'être objective, précise et donne des vitesses voisines de celle classiquement définie avec un seuil de vitesse  $\bar{U}^{seuil}$ .

**Chapitre 5** Dans ce dernier chapitre, on a mis en place une procédure de changement d'échelle en s'appuyant sur la méthode développée par JACKSON (2000). On a ainsi obtenu une description mésoscopique du système à partir des informations à l'échelle microscopique. Nous avons déduit de ces grandeurs, les champs de contrainte apparente, les rhéologies apparentes des phases équivalentes ainsi que l'interaction moyenne fluide-grains, au travers du terme de forçage fluide-particules  $n\langle \mathbf{f}_1 \rangle^p$ .

Commençons par l'interaction fluide-grains. Elle se résume ici aux forces de traînée et de portance. Ces forces s'expriment en fonction de  $\langle u \rangle^p - \langle u \rangle^f$  ce qui pose problème car l'augmentation de l'épaisseur du VER fait augmenter artificiellement cet écart entre les vitesses fluide et granulaire. On a tout de même réussi à valider une expression de la force moyenne de traînée en prenant une épaisseur du VER qui tend vers 0 (mais les champs sont alors très fluctuants et ne vérifient plus les équations mésoscopiques). Pour la force moyenne de portance, elle est inférieure à l'erreur commise lors du changement d'échelle, ce qui nous empêche de conclure. Pour ces deux quantités, l'augmentation de la taille du domaine de simulation (à l'horizontale) ne pourrait améliorer les résultats obtenus que dans une certaine limite. Nous sommes confrontés ici à une limite de la méthode d'homogénéisation utilisée. L'emploi de cette méthode présuppose que le problème vérifie les hypothèses de séparation d'échelles. Or, au voisinage de la surface du lit de grains, cette hypothèse est nécessairement mise en défaut puisque  $L \simeq d$  (où  $L$  est l'échelle de longueur mésoscopique et  $d$  est l'épaisseur caractéristique de la surface du lit de grains), on ne peut donc pas vérifier les inégalités  $d \ll h_g \ll L$  (et ce, quelque soit l'épaisseur  $h_g$  du VER).



L'homogénéisation des phases fluide et granulaire a permis d'obtenir les contraintes apparentes dans les deux phases avec une bonne précision dans la couche de grains mobiles. Les erreurs ne sont pas négligeables dans la partie statique du lit de grains et augmenter la taille du domaine de simulation (ou utiliser des réalisations différentes du même lit, afin d'effectuer une moyenne d'ensemble) permettrait de faire diminuer ces erreurs, l'hypothèse d'ergodicité n'étant pas vérifiée dans cette zone du lit. Toutefois, cela ne pose pas de problème pour en retirer la rhéologie apparente des phases équivalentes car cette partie du lit ne s'écoule pas, elle est bloquée (jamming). La rhéologie apparente est extraite de la couche de grains mobiles. On a ainsi pu observer les variations des rhéologies des phases équivalentes avec les paramètres sans dimension  $Re_p$  et  $\theta$  et le plus souvent en donner des expressions explicites ne dépendant que des quantités mésoscopiques (il s'agit donc de relations de fermeture pour l'échelle mésoscopique). De plus, les expressions des propriétés effectives des phases équivalentes, qui ont été développées pour des suspensions homogènes, semblent aussi fonctionner ici. Les valeurs des différents coefficients intervenant dans ces expressions ne sont toutefois pas les mêmes et dépendent des paramètres  $Re_p$  et  $\theta$ .

Si on considère un modèle à une phase (phase de mélange), les forces d'interaction fluide-grains n'interviennent plus et n'ont plus besoin d'être exprimées à partir des grandeurs mésoscopiques afin de fermer complètement le problème à cette échelle. On a aussi observé un résultat plutôt surprenant : la rhéologie apparente de la phase de mélange semble relativement "unique". Nous avons observé les rhéologies apparentes des phases équivalentes fluides et granulaire et elle dépendent du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  et du nombre de Shields  $\theta$ , or la rhéologie de la phase de mélange est bien décrite par la relation de KRIEGER et DOUGHERTY (1959) avec  $\phi_m = 0.62$  quelque soient les valeurs de  $Re_p \in [0.1, 10]$  et  $\theta \in [0.1, 0.7]$ .

On a finalement effectué un second changement d'échelle vers l'échelle macroscopique. À cette échelle le lit de grains est considéré comme un bord du domaine occupé par le fluide sur lequel on doit se donner une condition limite pour la vitesse. On modélise l'écoulement des grains dans la couche de grains mobiles comme une singularité du point de vue du fluide. Le changement d'échelle nous a permis d'exprimer cette condition limite comme une condition de NAVIER. Ce type de condition limite autorise une vitesse non nulle sur la "paroi" équivalente. Cette vitesse de glissement est proportionnelle au taux de cisaillement, le coefficient de proportionnalité étant la longueur de glissement  $\lambda_a$ . On a pu extraire les valeurs de  $\lambda_a$  de nos simulations et en trouver une expression à partir des grandeurs macroscopiques (et du diamètre des grains  $d$ ). Les profils macroscopiques de vitesse ainsi obtenus ont été comparés aux profils microscopiques et on a observé que l'erreur commise sur  $\lambda$  était toujours inférieure à  $d$ . En passant à l'échelle macroscopique, on ne considère plus les particules comme ayant une extension spatiale, elles sont réduites à des points (au sens mathématique du terme, *i.e.* de mesure nulle) et on ne pouvait donc *a priori* pas espérer obtenir une erreur inférieure à  $d$ . Nos résultats montrent que  $\lambda_a$  varie linéairement avec  $\theta$  et qu'elle est indépendante de  $Re_p$ .

## Perspectives

- Pour aller plus loin, il serait possible d'effectuer la même étude avec des domaines de résolutions plus grands et sur des maillages plus fins dans le but d'obtenir des résultats plus significatifs pour les forces de portance et de traînée. Cela permettrait sans doute aussi d'obtenir des résultats moins fluctuant.
- Nous n'avons pas fait varier le rapport des densités du fluide et des grains dans cette étude. Il serait intéressant d'en étudier l'impact sur l'écoulement considéré, et en particulier sur les rhéologies apparentes des phases équivalentes.
- Il serait également intéressant d'explorer des nombres de Shields  $\theta$  plus élevés, en particulier pour la viscosité apparente de la phase fluide pour laquelle on ne possède que peu d'informations. On pourrait observer son comportement pour des grands nombres de Shields  $\theta$  et des faibles nombres de Reynolds particulaire  $Re_p$  pour tenter d'observer un palier à  $\beta \simeq 2.5$  (cette valeur de  $\beta$  mène, après développement, à la relation d'EINSTEIN) lorsqu'on vérifie environ les hypothèses faites par EINSTEIN pour dériver l'expression de la viscosité apparente de cette phase (à savoir, un écoulement de Stokes donc pour  $Re_p \ll 1$  et pour une suspension diluée, donc pour la partie supérieure du lit de grains mobile lorsque  $\theta \gg 1$ ).
- Comme dans la plupart des études dans le domaine, nous avons omis les équations correspondant à la rotation des grains : le théorème du moment dynamique appliqué à chaque particule. Ce système d'équation possède une version mésoscopique (au même titre que les équations de conservation de la quantité de mouvement des particules). Il serait intéressant de se pencher sur cet aspect du système physique étudié car la force de portance, en particulier, dépend de la rotation des particules.
- Une autre perspective qui mériterait d'être explorée est celle des instabilités des lits grains. Ici, nous avons pris un domaine de taille réduite afin d'être sûr de garder lit plan, mais si on augmente la taille du domaine, ça ne sera plus la cas. Observer des rides à partir de simulations complètement résolues (à l'échelle microscopique) est relativement coûteux en ressources numériques. On pourrait alors utiliser les relations de fermetures obtenues ici pour simuler un lit de grains bien plus grand (que ce soit via des méthodes de type Euler-Lagrange ou Euler-Euler) et ainsi observer et étudier les instabilités du lit de grains observé, à l'instar du travail de thèse de BOUTELOUP (2017) qui a utilisé les relations de fermeture qu'il a trouvé dans la littérature.
- Finalement, une autre approche qui mériterait d'être explorée, serait de faire le même type d'analyse pour des avalanches. Cela retirerait le caractère "singulier" de la couche de grains charriée. Il ne serait toute fois pas possible d'effectuer des moyennes temporelles et il faudrait alors soit effectuer plusieurs avalanches à partir de différentes configurations, soit effectuer des avalanches de grande taille pour obtenir des statistiques satisfaisantes.

# Chapitre 7

## Annexes

### Sommaire

---

A	Estimation du nombre de grains de sable dans la dune du Pilat . .	202
B	Maillage irrégulier du canal de Couette 2D . . . . .	203
C	Vitesse de rotation d'un cylindre dans un écoulement cisailé à Reynolds nul . . . . .	203
D	Dérivation de l'expression de $n < S >^p$ . . . . .	206
E	Lien entre $\Delta H$ et $\delta h$ . . . . .	207
F	Convergence des résultats mésoscopiques avec la taille du do- maine et le raffinement du maillage . . . . .	208
G	Influence de l'épaisseur $h_g$ sur les contraintes apparentes à l'échelle mésoscopique . . . . .	213

---

## A Estimation du nombre de grains de sable dans la dune du Pilat



**FIGURE A.1** – Photo aérienne de la dune du Pilat.

La dune du Pilat (figure A.1), située à l'entrée sud du bassin d'Arcachon, en France, est la plus haute dune d'Europe (hauteur de  $h = 106.6m$  en 2018). Elle s'étend sur  $l = 616m$  d'ouest en est et sur  $L = 2.9km$  du nord au sud. Si on approxime la forme réelle de cette dune par celle d'un prisme de mêmes dimensions, on peut estimer le volume de la dune du Pilat  $V_{Pilat}$  :

$$V_{Pilat} = \frac{hlL}{2} = 95 \times 10^6 m^3. \quad (A.1)$$

Pour savoir à combien de grains de sable cela correspond, on considère des grains de sable de taille "moyenne". La norme française NF P18-560, utilisée notamment dans le domaine routier, définit le diamètre  $d$  des grains de sable par  $2mm \leq d \leq 0.2mm$  pour du sable grossier et  $0.2mm \leq d \leq 20\mu m$  pour du sable fin. On considère alors des grains de taille intermédiaire :  $d = 0.2mm$ . On considère également que les grains sont sphériques. On peut alors écrire :

$$\bar{\phi} V_{Pilat} = N_{Pilat} V_p, \quad (A.2)$$

où  $V_p \simeq \frac{\pi d^3}{6}$  est le volume d'un grains de sable,  $\bar{\phi}$  est la fraction volumique moyenne du sable constituant la dune et  $N_{Pilat}$  le nombre de grains la constituant. On doit maintenant estimer  $\bar{\phi}$  : on sait que pour un arrangement aléatoire de sphères monodisperses, on obtient  $\bar{\phi} \simeq 0.6$ . Mais ici, les grains de sables constituant la dune, ne sont ni monodisperses ni sphériques, et donc la vraie valeur de  $\bar{\phi}$  est plus élevée. Une estimation basse de  $N_{Pilat}$  est suffisante ici et on prend donc  $\bar{\phi} = 0.6$ . On trouve alors :

$$N_{Pilat} = \frac{\bar{\phi} V_{Pilat}}{V_p} = 1.36 \times 10^{19}. \quad (A.3)$$

La dune du Pilat contient donc plus 10 milliards de milliards de grains de sable !

Approximer la dune par un prisme était peut être une grosse approximation et nous donne un majorant du volume de la dune. On peut aussi estimer son volume, et donc la quantité de grains la

constituant, en supposant que la dune a une forme pyramidale (avec les mêmes dimensions). On a obtenu alors un minorant du volume de la dune :

$$V_{Pilât}^{pyramide} = \frac{hlL}{3} = 63.5 \times 10^6 m^3, \quad (A.4)$$

et dans ce cas, pour  $d = 0.2mm$ , on trouve  $N_{Pilât} = 9.1 \times 10^{18}$  grains dans ce cas.

On peut aussi remettre en question l'hypothèse faite sur la taille moyenne des grains de sable mais même en considérant des grains sphériques de  $2mm$  de diamètre, la dune en comporte alors "seulement" 1000 fois moins, ce qui fait tout de même environ 10 millions de milliards de grains.

Le nombre de grains constituant cette dune est donc, dans tous les cas, gigantesque. La dune et les grains de sable la constituant n'appartiennent pas à la même échelle de description.

## B Maillage irrégulier du canal de Couette 2D

Pour le cas test du cylindre en rotation libre, on utilise un maillage irrégulier. Cela permet d'alléger la taille du maillage et donc de réduire le temps de calcul sans pour autant nuire à la précision de la méthode. Ce maillage est constitué d'un bloc de  $3d \times 3d$  maillé régulièrement et centré sur le cylindre. À l'extérieur du bloc central, la résolution du maillage diminue linéairement dans les 2 directions  $x$  et  $y$  lorsque l'on s'éloigne de ce bloc. Nous justifions l'utilisation d'un tel maillage à l'aide du tableau B.1. On utilise des maillages qui sont réguliers sur l'ensemble du domaine de simulation comme référence.

Résolution du bloc central $d/\Delta x = d/\Delta y$	Nombre total de cellule constituant le maillage	Vitesse de rotation $\Omega$	Erreur relative $\epsilon$
10	$220 \times 220$ (régulier)	-0.416400	—
	$90 \times 90$	-0.417854	0.35%
20	$440 \times 440$ (régulier)	-0.409165	—
	$180 \times 180$	-0.408021	0.36%
	$98 \times 98$	-0.407680	0.28%

**TABLE B.1** – Vitesse de rotation du cylindre en stationnaire (adimensionné par  $1/\dot{\gamma}$ ) en fonction du maillage utilisé.  $Re_p = 9.091$ ,  $\Delta/\Delta x = 1.5$  et  $N_L = 1$ .

La tableau B.1 montre que la vitesse de rotation du cylindre est pratiquement indépendante de la façon de mailler l'espace loin du cylindre. En effet, on observe des variations de moins d'un demi pourcent de la vitesse de rotation du cylindre à l'équilibre. Ces erreurs sont négligeables par rapport aux quelques pourcents d'erreur que l'on a par rapport à la solution de référence de PATANKAR et HU (2002) pour le même jeu de paramètres physiques et numériques. On utilise donc le maillage  $98 \times 98$  pour réaliser cette étude.

## C Vitesse de rotation d'un cylindre dans un écoulement cisailé à Reynolds nul

On reprend ici le calcul du chapitre 2.4 du livre *A Physical Introduction to Suspension Dynamics* de GUAZZELLI et MORRIS (2011).

On se place en 2D avec un écoulement non perturbé de cisaillement simple et on ajoute un cylindre de rayon  $a$  dans cet écoulement. Le centre du cylindre définit l'origine du repère. Il est libre de tourner sur lui même et on appelle  $\omega_p$  sa vitesse angulaire. Les conditions limites sont l'adhérence à la paroi du cylindre et un écoulement non perturbé à l'infini.

On note  $\vec{u}^\infty = (\gamma y, 0, 0)$  dans le repère cartésien  $(x, y, z)$ , le champ de vitesse non perturbé et  $\overline{\overline{G}}^\infty$  le tenseur des gradients de vitesse non perturbé. Les équations qui régissent l'écoulement sont appelées équations de Stokes et sont rappelées ci-après :

$$\eta_f \vec{\nabla}^2 \vec{u} = \vec{\nabla} p, \quad (C.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad (C.2)$$

avec les conditions limites :

$$\begin{cases} \vec{u}|_{r=a} = \vec{\omega}_p \wedge \vec{r} \\ \vec{u}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \vec{u}^\infty(\vec{r}) = \overline{\overline{G}}^\infty \cdot \vec{r} \\ p(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \quad (C.3)$$

On peut décomposer le tenseur  $\overline{\overline{G}}^\infty$  en deux contributions distinctes :

$$\overline{\overline{G}}^\infty = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 \\ -\gamma/2 & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{E}}^\infty + \overline{\overline{\Omega}}^\infty, \quad (C.4)$$

où le tenseur  $\overline{\overline{E}}^\infty$  représente une dilatation pure et le tenseur  $\overline{\overline{\Omega}}^\infty$  correspond à une rotation pure.

Le système d'équations de Stokes ((C.1), (C.2)) est linéaire, on peut donc le décomposer en deux sous-problèmes par linéarité. Il faut ensuite trouver la solution pour chacun des sous-problèmes et enfin sommer les deux solutions pour obtenir une solution du problème complet. Pour les deux sous-problèmes, le système différentiel à résoudre reste inchangé mais les conditions limites sont également scindées en deux contributions, une pour chaque sous-problème.

Pour le problème de dilatation pure, on garde les conditions limites suivantes :

$$\begin{cases} \vec{u}|_{r=a} = 0, \\ \vec{u}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \vec{u}_{dilat}^\infty(\vec{r}) = \overline{\overline{E}}^\infty \cdot \vec{r}, \\ p(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0, \end{cases} \quad (C.5)$$

et pour le problème de la rotation pure, on garde celles-ci :

$$\begin{cases} \vec{u}|_{r=a} = \vec{\omega}_p \wedge \vec{r} \\ \vec{u}(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \vec{u}_{rot}^\infty(\vec{r}) = \overline{\overline{\Omega}}^\infty \cdot \vec{r} \\ p(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \end{cases} \quad (C.6)$$

Si on somme ces deux systèmes, on retrouve bien le problème de départ.

### Rotation pure

Pour la rotation pure, on commence par réécrire la condition limite sur la vitesse à l'infini comme ceci :

$$\vec{u}_{rot}^\infty(\vec{r}) = \overline{\overline{\Omega}}^\infty \cdot \vec{r} = \left( -\frac{\dot{\gamma}}{2} \vec{e}_z \right) \wedge \vec{r} = \vec{\omega}^\infty \wedge \vec{r}. \quad (C.7)$$

En prenant la divergence de (C.1) et en utilisant (C.2), on obtient :

$$\vec{\nabla}^2 p = 0. \quad (C.8)$$

L'équation (C.2) implique l'équation de Laplace pour la pression ; donc si on trouve une solution pour la deuxième, il faudra vérifier qu'elle est bien solution pour la première aussi. On cherche alors un champ de pression solution de l'équation de Laplace. On peut le chercher comme une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques décroissantes :

$$\Phi_0 = \frac{1}{r}, \quad \vec{\Phi}_1 = \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \left( \overline{\Phi_2} \right)_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3 \frac{x_i x_j}{r^5}, \text{ etc...} \quad (\text{C.9})$$

On effectue ensuite une analyse dimensionnelle du problème. Toutes les grandeurs physiques mises en jeu ici sont :

- la pression  $p$ ,
- la vitesse du fluide  $\vec{u}_{rot}$ ,
- le vecteur  $\vec{\omega}^\infty$ ,
- et la viscosité dynamique du fluide  $\eta_f$ .

Or  $[\eta_f] = M.L^{-1}.T^{-1}$ ,  $[\vec{\omega}^\infty] = T^{-1}$ ,  $[\vec{u}_{rot}] = L.T^{-1}$  et  $[p] = M.L^{-1}.T^{-2}$ , donc d'après le théorème de BUCKINGHAM, on a  $p \propto \eta_f \vec{\omega}^\infty$  mais la pression est un scalaire. La seule possibilité est alors  $p \propto \eta_f \vec{\Phi}_1 \cdot \vec{\omega}^\infty$ . Or  $\vec{\Phi}_1 = \frac{\vec{r}}{r^3}$  et  $\vec{\omega}^\infty = -\frac{\gamma}{2} \vec{e}_z$ , donc  $\vec{\Phi}_1 \cdot \vec{\omega}^\infty = 0$ . La solution pour la pression dans le fluide est donc :

$$p(\vec{r}) = 0, \quad (\text{C.10})$$

partout dans tout le fluide. Si on revient sur l'équation (C.1) maintenant que la pression est nulle, on trouve que la vitesse est aussi solution de l'équation de Laplace. On peut donc aussi la chercher comme une combinaison linéaire d'harmoniques sphériques décroissantes. L'analyse dimensionnelle effectuée plus haut est toujours valable et nous permet d'affirmer que la vitesse est proportionnelle à  $\vec{\omega}_p$  et à  $\vec{r}$ . Les fonctions de cette famille de solutions de l'équation de Laplace tendent vers 0 pour  $r \rightarrow +\infty$ , on cherche alors à exprimer  $\vec{u}_{rot} - \vec{u}_{rot}^\infty$  à l'aide des harmoniques sphériques.  $\vec{u}_{rot} - \vec{u}_{rot}^\infty$  est un vecteur du plan  $(x,y)$  (contrairement aux pseudo-vecteurs  $\vec{\omega}_p$  et  $\vec{\omega}^\infty$  dont la direction est selon l'axe  $z$ ). On va donc chercher  $\vec{u}_{rot}$  sous la forme :

$$\vec{u}_{rot} - \vec{u}_{rot}^\infty = \lambda \vec{\omega}_p \wedge \vec{\Phi}_1 = \lambda \vec{\omega}_p \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (\text{C.11})$$

La condition limite à la paroi du cylindre permet de déterminer la constante  $\lambda = a^3 \left( 1 - \frac{\omega_p^\infty}{\omega_p} \right)$  et on obtient alors le champ de vitesse solution :

$$\vec{u}_{rot}(\vec{r}) = \left[ \left( \frac{a}{r} \right)^3 \left( 1 - \frac{\omega_p^\infty}{\omega_p} \right) \vec{\omega}_p + \vec{\omega}^\infty \right] \wedge \vec{r}. \quad (\text{C.12})$$

Ensuite, il ne reste qu'à déterminer  $\omega_p$ . Pour cela, on calcule le couple  $\Gamma$  que le fluide exerce sur le cylindre :  $\omega_p$  est alors la rotation du cylindre telle que ce couple soit nul. En effet, le cylindre est libre de tourner et la solution recherchée est stationnaire, le couple total exercé sur le cylindre est donc nul. En coordonnées cylindriques,  $\Gamma$  s'écrit :

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \sigma_{\theta r}(r = a, \theta) d\theta, \quad (\text{C.13})$$

où  $\sigma_{\theta r}$  est la composante  $(\theta, r)$  du tenseur des contraintes visqueuses (rappelons qu'ici  $p = 0$ ). En coordonnées cylindriques,  $\sigma_{\theta r}$  s'exprime comme suit :

$$\sigma_{\theta r} = \eta_f \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right) = -3\eta_f \frac{a^3}{r^3} (\omega_p - \omega^\infty). \quad (\text{C.14})$$

On obtient finalement :

$$\Gamma = 0 = -6\pi\eta_f (\omega_p - \omega^\infty). \quad (\text{C.15})$$

On a donc  $\omega_p = \omega^\infty$  à l'équilibre et alors le champ de vitesse solution donné par la relation (C.12) se réécrit simplement :

$$\vec{u}_{rot}(\vec{r}) = \vec{\omega}^\infty \wedge \vec{r}, \text{ pour tout } \vec{r}. \quad (\text{C.16})$$

Comme la partie "dilatation" du problème n'induit pas de rotation du cylindre (par symétrie du sous-problème), on a immédiatement :

$$\omega_p = -\frac{\dot{\gamma}}{2} \text{ pour un cylindre placé dans un cisaillement simple.} \quad (\text{C.17})$$

Si on adimensionne la vitesse angulaire  $\omega_p$  par le cisaillement  $\dot{\gamma}$ , on trouve le résultat annoncé :

$$\Omega = \frac{\omega_p}{\dot{\gamma}} = -\frac{1}{2}. \quad (\text{C.18})$$

Un lecteur assidu aura remarqué qu'on ne résout pas le problème complètement. Il reste la partie dilation à résoudre, mais l'objet de ce calcul était de déterminer  $\omega_p$  et pas particulièrement d'exprimer le champ de vitesse solution du problème complet. La résolution du second sous-problème se fait de la même façon que pour la rotation mais les calculs sont moins triviaux car la pression n'est pas nulle et le champ de vitesse s'exprime, entre autre, à l'aide de l'harmonique sphérique décroissante de rang 2. Pour finir, il suffit de sommer les deux contributions  $\vec{u}_{rot}$  et  $\vec{u}_{dilat}$  pour obtenir le champ de vitesse dans un milieu infini soumis à un cisaillement simple à Reynolds nul dans lequel on place un cylindre libre de tourner. Pour obtenir plus de détails, voir les chapitres 2.1.1 et 2.1.3 et 2.4 du livre *A Physical Introduction to Suspension Dynamics* de GUZZELLI et MORRIS (2011).

## D Dérivation de l'expression de $n < S >^p$

Dans cette annexe, on démontre l'expression de  $n \langle s^f \rangle^p$  avec des intégrales volumiques (relation (5.24)) au lieu d'intégrales surfaciques. Pour cela, on commence avec l'équation (2.19) :

$$\rho_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \nabla \cdot \sigma + \mathbf{f}_{IBM} + \mathbf{g}, \quad (\text{D.1})$$

où  $\sigma = -P\mathbf{I} + \eta_f(\nabla(\mathbf{u}) + \nabla(\mathbf{u})^T)$  est le tenseur des contraintes totales (*i.e.* de pression et visqueuses). On considère ensuite le produit tensoriel de l'équation (D.1) avec le vecteur position  $\mathbf{r}$  (où  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^p$  est le vecteur position, repéré par rapport au centre de la particule  $p$ ). On intègre ensuite l'ensemble de ce produit sur le volume de la particule  $p$ .

$$\int_{V_p} \rho_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \otimes \mathbf{r} dv = \int_{V_p} \nabla \cdot \sigma \otimes \mathbf{r} dv + \int_{V_p} \mathbf{f}_{IBM} \otimes \mathbf{r} dv + \int_{V_p} \mathbf{g} \otimes \mathbf{r} dv. \quad (\text{D.2})$$

L'intégrale contenant l'accélération de pesanteur est nulle car  $\mathbf{g}$  est constant et la particule possède une symétrie sphérique par rapport à son centre ( $\int_{V_p} \mathbf{g} \otimes \mathbf{r} dv = \mathbf{g} \otimes \int_{V_p} \mathbf{r} dv = \mathbf{g} \otimes \mathbf{0} = 0$ ). On effectue une intégration par parties du premier terme du second membre :



$$\int_{V_p} \nabla \cdot \sigma \otimes \mathbf{r} dv = \int_{S_p} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{r} dS - \int_{V_p} \sigma dv. \quad (\text{D.3})$$

On obtient alors la relation suivante :

$$\int_{S_p} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{r} dS = \frac{d}{2} \int_{S_p} (\sigma \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} dS = \int_{V_p} \sigma dv + \int_{V_p} \rho_f \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \otimes \mathbf{r} dv - \int_{V_p} \mathbf{f}_{IBM} \otimes \mathbf{r} dv. \quad (\text{D.4})$$

Il ne reste plus qu'à pondérer et à sommer sur les particules pour trouver l'expression finale de  $n\langle s^f \rangle^p$  donnée par l'équation (5.24). En pratique, une expression symétrique a été utilisée ; où " $(\sigma \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n}$ " est remplacé par " $\frac{1}{2} ((\sigma \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\sigma \cdot \mathbf{n}))$ " par exemple.

## E Lien entre $\Delta H$ et $\delta h$

L'objectif de cette annexe n'est pas d'étudier le rapport des épaisseurs caractéristiques de la couche de grains mobiles  $\frac{\Delta H}{\delta h}$  mais de montrer qu'il dépend à la fois du profil de vitesse des grains (normalisé) et de la répartition verticales des grains et permet également d'en donner une estimation numérique pour quelques cas simples. On estime alors ce rapport en se plaçant dans le cadre du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009). On reprend les mêmes notations que dans ce modèle (voir section 4.2). Dans le cadre de ce modèle, on connaît les profils de vitesse et de fraction volumique des particules. On a  $\phi(\tilde{Y}) = \bar{\phi}$  et  $U_p(\tilde{Y})$  est donné, pour tout  $\tilde{Y} = \frac{y-h_b}{h_m-h_b} \in [0, 1]$ , par la relation (équations (4.12) et (4.29)) :

$$U_p = \frac{9\theta^2 V_s}{\mu \bar{\phi} \eta_r} \tilde{Y}^2 = V \tilde{Y}^2, \quad (\text{E.1})$$

où  $V = \frac{9\theta^2 V_s}{\mu \bar{\phi} \eta_r}$ .

On calcule  $h_{bed}$  d'après sa définition (équation (4.23)) :

$$h_{bed} - h_b = \Delta H \frac{\int_0^1 \bar{\phi} V \tilde{Y}^3 d\tilde{Y}}{\int_0^1 \bar{\phi} V \tilde{Y}^2 d\tilde{Y}} = \Delta H \frac{\int_0^1 \tilde{Y}^3 d\tilde{Y}}{\int_0^1 \tilde{Y}^2 d\tilde{Y}} = \frac{3}{4} \Delta H. \quad (\text{E.2})$$

Puis on calcule  $\delta h$ , également à partir de sa définition (équation (4.26)) :

$$\delta h^2 = \Delta H^2 \frac{\int_0^1 (\tilde{Y} - \frac{3}{4})^2 \tilde{Y}^2 d\tilde{Y}}{\int_0^1 \tilde{Y}^2 d\tilde{Y}} = \frac{3}{80} \Delta H^2. \quad (\text{E.3})$$

On obtient finalement :

$$\frac{\Delta H}{\delta h} = \sqrt{\frac{80}{3}} \simeq 5.16. \quad (\text{E.4})$$

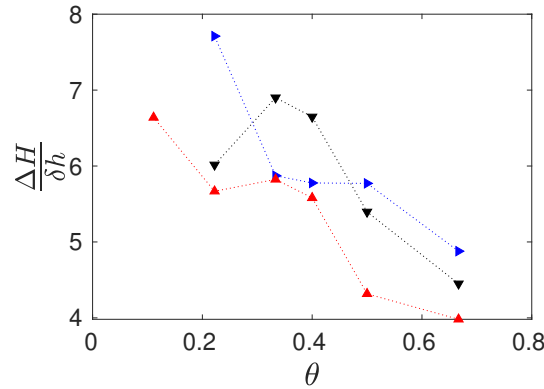
Ce résultat correspond au rapport  $\frac{\Delta H}{\delta h}$  dans le cadre du modèle de MOUILLERON *et al.* (2009). On a vu dans le chapitre 4 que ce modèle n'était pas toujours la meilleure approximation possible. On pourrait aussi considérer un profil de vitesse granulaire qui varie comme  $\tilde{Y}^3$  par exemple, ou encore un profil de fraction volumique de grains non constant. On considère alors des variations de  $\phi$  dans la couche mobile qui sont linéaire et sinusoïdale. Le tableau E.1 présente les valeurs prises par le

rapport  $\Delta H/\delta h$  dans tous ces cas (on ne donne pas les expressions analytiques dans le cas d'un profil de fraction volumique de grains sinusoïdal pour des raisons de place dans la tableau).

Vitesse des grains	Fraction volumique solide	$\frac{h_{bed}-h_b}{\Delta H}$	$\frac{\Delta H}{\delta h}$
$U_p = V\tilde{Y}^2$	$\phi = \bar{\phi}$	$\frac{3}{4}$	$\sqrt{\frac{80}{3}} \simeq 5.16$
	$\phi = \phi_0(1 - \tilde{Y})$	$\frac{3}{5}$	5
	$\phi = \frac{\phi_0}{2}(1 + \cos(\pi\tilde{Y}))$	0.507	5.43
$U_p = V'\tilde{Y}^3$	$\phi = \bar{\phi}$	$\frac{4}{5}$	$\sqrt{\frac{75}{2}} \simeq 6.12$
	$\phi = \phi_0(1 - \tilde{Y})$	$\frac{2}{5}$	$\sqrt{\frac{875}{54}} \simeq 4.03$
	$\phi = \frac{\phi_0}{2}(1 + \cos(\pi\tilde{Y}))$	0.594	5.91

**TABLE E.1** – Rapport  $\frac{\Delta H}{\delta h}$  dans le cas d'un profil quadratique ou cubique de vitesse des grains et pour trois modélisations du profil de fraction volumique de grains.

Le tableau E.1 montre que, quelque soit la forme des profils de vitesse des grains et de fraction volumique solide considérés ici, la valeur du rapport  $\frac{\Delta H}{\delta h}$  varie entre 4 et 6, mais vaut généralement plus de 5. La figure E.1 donne la valeur de ce rapport dans le cas de notre campagne de simulation.



**FIGURE E.1** – Rapport  $\frac{\Delta H}{\delta h}$  en fonction du nombre de Shields  $\theta$  pour les nombres de Reynolds ( $\blacktriangledown$ ) :  $Re_p = 0.1$  ; ( $\blacktriangleright$ ) :  $Re_p = 1$  ; ( $\blacktriangle$ ) :  $Re_p = 10$ .

La figure E.1 montre que le rapport des deux longueurs caractéristiques de l'épaisseur de la couche de grains mobiles  $\frac{\Delta H}{\delta h}$  prend effectivement des valeurs de l'ordre de 5 – 6. Ce rapport est décroissant avec le nombre de Shields  $\theta$  et semble aussi décroître avec le nombre de Reynolds particulière  $Re_p$ . Il prend des valeurs qui peuvent aller jusqu'à 7 – 8 pour les faibles valeurs du nombre de Shields  $\theta$  (nous n'avons pas obtenu de valeurs aussi élevées avec les quelques modélisations considérées ici) et diminue jusqu'à 4 pour  $Re_p = 10$  et  $\theta = 0.67$ .

## F Convergence des résultats mésoscopiques avec la taille du domaine et le raffinement du maillage

Dans cette annexe, on montre la convergence avec la taille du domaine et avec le raffinement du maillage des propriétés mésoscopiques des phases équivalentes fluide, granulaire et de mélange.

Dans la partie 3.4, on a défini quatre cas, notés A, B, C et D, et on a étudié la dépendance du débit granulaire saturé ainsi que des profils de vitesse des grains et du fluide vis-à-vis de ces différents cas. Les caractéristiques des différents cas sont rappelées dans le tableau F.1.

Cas	Raffinement du maillage $d/\Delta x$	Taille du domaine de simulation $L_x \times L_y \times L_z$	Épaisseur des frontières immergées $\Delta$
A (-)	10	$4d \times 20d \times 4d$	$1.3\Delta x = 0.13d$
B (-)	10	$8d \times 20d \times 8d$	$1.3\Delta x = 0.13d$
C (-)	20	$4d \times 20d \times 4d$	$2.6\Delta x = 0.13d$
D (-)	20	$4d \times 20d \times 4d$	$1.3\Delta x = 0.065d$

**TABLE F.1** – Résumé des différents cas considérés.  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ .

Ici, on étudie l'évolution de l'erreur commise sur les contraintes apparentes dans chaque phase équivalente et les variations des rhéologies effectives de ces phases pour ces cas. Le tableau F.2 présente l'erreur maximale commise sur les contraintes apparentes  $\Sigma_{yy}^f$ ,  $\Sigma_{xy}^f$ ,  $\Sigma_{yy}^p$  et  $\Sigma_{xy}^p$  pour les quatre cas définis précédemment. L'erreur (locale) est mesurée de la même façon que dans les sections 5.2.3, 5.2.2 et 5.2.4, c'est-à-dire comme la différence entre la contrainte apparente et une intégrale des autres termes du bilan de forces (voir les équations (5.17), (5.18) et (5.26)).

cas	Phase fluide		Phase Granulaire	
	$E_{max}(\Sigma_{yy}^f)$	$E_{max}(\Sigma_{xy}^f)$	$E_{max}(\Sigma_{yy}^p)$	$E_{max}(\Sigma_{xy}^p)$
A	3.59%	3.43%	3.55%	5.29%
B	3.90%	2.64%	1.32%	1.67%
C	0.393%	1.61%	5.97%	3.12%
D	0.583%	1.65%	1.77%	4.19%

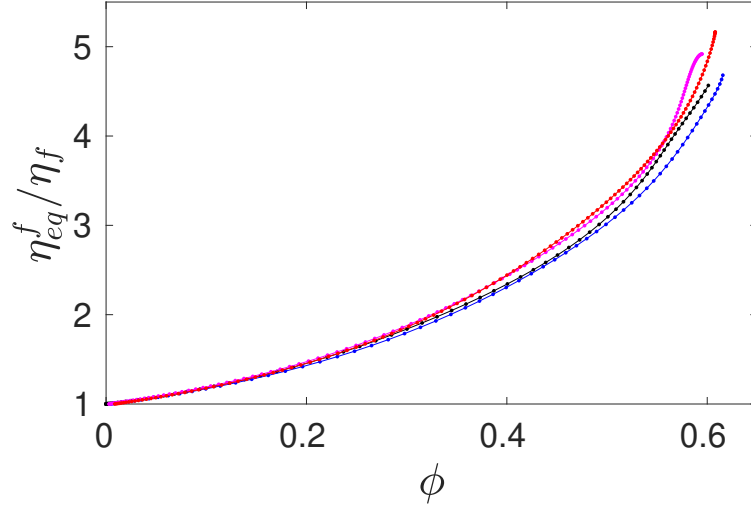
**TABLE F.2** – Erreur maximale locale commise pour les quatre cas considérés pour  $Re_p = 1$ ,  $\theta = 0.67$  et  $r = 2.5$ . Pour les contraintes normales  $\Sigma_{yy}^f$  et  $\Sigma_{yy}^p$ , on utilise la contrainte locale comme référence et pour les contraintes de cisaillement  $\Sigma_{xy}^f$  et  $\Sigma_{xy}^p$ , on utilise la contrainte de cisaillement loin du lit de grains  $\eta_f \dot{\gamma}$  comme référence. On ne prend pas en compte la zone d'influence des rugosités au fond du domaine lors de la détermination de l'erreur maximale.

Premièrement, si on compare les cas A et B, on voit que l'erreur pour la phase fluide n'est pas affectée par la taille du domaine. L'erreur pour la phase granulaire diminue quant à elle d'un facteur 2 à 3. Cette diminution est due à la limite de la prise de moyenne temporelle pour compenser la faible taille du domaine dans la zone statique du lit de grains. Avec un domaine B quatre fois plus vaste, une prise de moyenne spatiale équivaut environ à quatre prise de moyenne pour des arrangements microscopiques différents sur le petit domaine A. Autrement dit, une prise de moyenne sur un grand domaine est une meilleure approximation de la moyenne d'ensemble, en particulier dans une zone statique du lit de grains où la prise de moyenne temporelle ne permet pas de compenser cet effet.

On compare ensuite les cas A et C pour mettre en avant l'influence du raffinement du maillage (sans changer l'épaisseur physique des frontières IBM). En divisant par deux la taille des cellules du maillage, l'erreur diminue fortement pour la phase fluide et reste du même ordre de grandeur pour la phase granulaire. Ici aussi, l'immobilité du fond du lit de grains est à mettre en cause. Même si la résolution de l'écoulement est améliorée, cela ne permet pas de compenser la mauvaise prise de moyenne temporelle dans la zone statique du lit de grains.

Finalement, on peut comparer les cas C et D. L'erreur commise reste relativement inchangée à l'exception de  $\Sigma_{yy}^p$ . Modifier l'épaisseur des frontières IBM n'influence pas la qualité de la prise de moyenne volumique et temporelle même si cela peut influencer les grandeurs mésoscopique.

On se penche ensuite sur la viscosité apparente de la phase fluide  $\eta_{eq}^f$ . La figure F.1 présente cette viscosité en fonction de la fraction volumique de grains pour les quatre cas considérés.

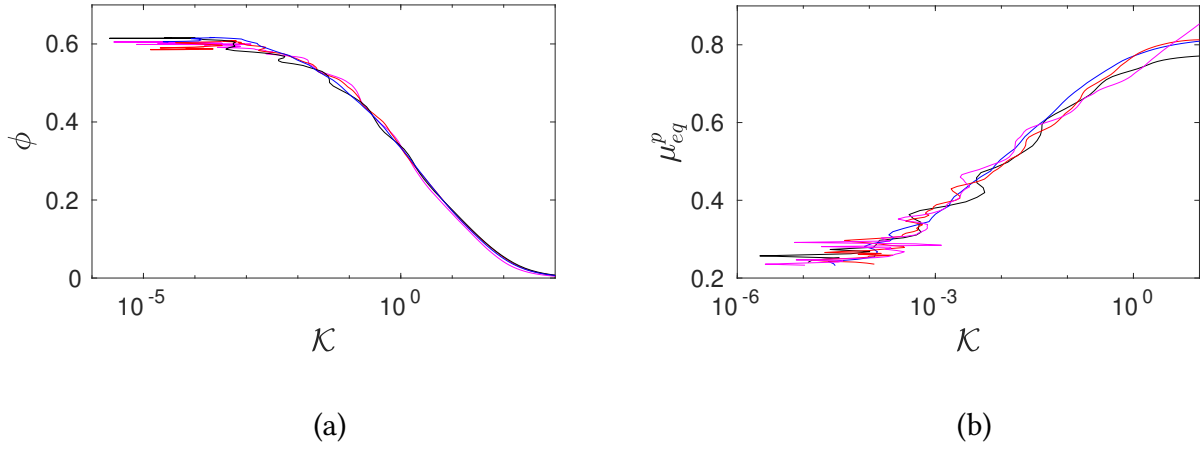


**FIGURE F.1** – Viscosité apparente de la phase de fluide  $\eta_{eq}^f$  pour les quatre cas (—) : A; (---) : B; (- · -) : C; (···) : D (voir le tableau F.1).

La viscosité apparente de la phase fluide  $\eta_{eq}^f$  dépend effectivement légèrement du raffinement du maillage. On peut voir deux tendance sur la figure F.1, au moins pour  $\phi \leq 0.5$  car pour les plus grandes valeurs de  $\phi$ , les variations observées sont également dues à la procédure de prise de moyenne dans la zone statique du lit de grains, il est donc difficile d'interpréter les résultats dans cette zone. On peut tout de même noter que les quatre viscosités apparentes possèdent relativement la même allure, même dans cette zone quasi-statique.

Pour les cas C et D, mieux résolus spatialement, la viscosité apparente  $\eta_{eq}^f$  varie plus vite avec la fraction volumique  $\phi$  que pour les cas A et B. Cela correspond à un exposant  $\beta$  plus grand (voir la relation (5.49)). Si on effectue un ajustement pour chacun de ces cas, on trouve  $\beta_A = 1.65$ ,  $\beta_B = 1.63$ ,  $\beta_C = 1.73$  et  $\beta_D = 1.71$ . La variation de  $\beta$  lorsqu'on raffine davantage le maillage va dans le bon sens et se rapproche de l'exposant attendu 2.5. On peut relativiser cet écart en rappelant qu'ici on a  $Re_p = 1$  et  $\theta = 0.67$  or l'exposant 2.5 est attendu pour  $Re_p \ll 1$  (écoulement de Stokes) et  $1 \ll \theta$  (suspension diluée). Le fait qu'on trouve pratiquement les mêmes exposants pour les cas A et B signifie que la faible taille du domaine A n'est pas aussi restrictive que ce qu'on pourrait penser et que les résultats obtenus sur ce domaine peuvent être considérés comme ayant convergé.

On s'intéresse maintenant à la rhéologie apparente de la phase granulaire. La figure F.2 présente les fonctions  $\mu_{eq}^p(\mathcal{K})$  et  $\phi(\mathcal{K})$  obtenues pour les quatre cas considérés ici.



**FIGURE F.2** – (a) : Fraction volumique de grains en fonction du nombre  $\mathcal{K}$  pour les quatre cas (–) : A; (–) : B; (–) : C; (–) : D. (b) : Coefficient de friction effectif de la phase granulaire en fonction du nombre  $\mathcal{K}$  pour les quatre cas (–) : A; (–) : B; (–) : C; (–) : D (voir le tableau F.1).

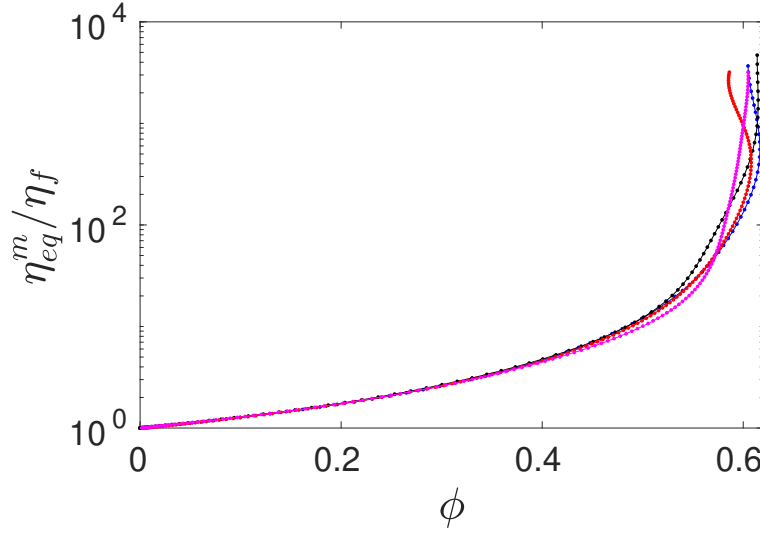
À première vue, aucune tendance particulière ne se dégage de la figure F.2. Les quatre cas présentent sensiblement la même rhéologie apparente pour la phase granulaire. On effectue des ajustements, en s'appuyant sur les relations (5.54) et (5.56), et on donne les valeurs des paramètres de ce modèle rhéologique dans le tableau F.3.

case	$\phi_c$	$\mu_1$	$\mu_2$	$\sqrt{K_0}$
A	0.615	0.243	0.794	0.125
B	0.624	0.227	0.829	0.115
C	0.619	0.246	0.836	0.145
D	0.619	0.234	0.871	0.152

**TABLE F.3** – Coefficients définissant la rhéologie de la phase granulaire équivalente (équations (5.54) et (5.56)) pour les quatre cas considérés A, B, C et D (voir le tableau F.1).

On obtient des coefficients qui varient légèrement d'un cas à l'autre mais il n'est pas évident d'associer ces variations aux différences entre les cas puisque les courbes  $\mu_{eq}^p(\mathcal{K})$  fluctuent de façon non négligeable et la qualité des ajustements effectués peut donc aussi être la cause de la variation de ces paramètres d'ajustement.

Finalement, on peut s'intéresser à la viscosité apparente de la phase de mélange. Notons que la viscosité de la phase de mélange reste toujours faible, avec un maximum d'environ  $5 \eta_f$ , comparé à la contribution de la phase granulaire qui diverge à la transition de blocage (jamming). Donc, d'après la relation (5.61), la viscosité apparente de la phase de mélange sera presque influencée de la même façon que la phase granulaire par les différences entre les quatre cas considérés. On ne s'attend donc pas à observer de variations significatives. La figure F.3 présente la viscosité apparente de la phase de mélange  $\eta_{eq}^m$  pour les quatre cas et les valeurs du coefficient  $\phi_m$  (fraction volumique de blocage) obtenues via des ajustements de la relation (5.60) sont données dans le tableau F.4.



**FIGURE F.3** – Viscosité apparente de la phase de mélange  $\eta_{eq}^m$  pour les quatre cas  $(-)$  : A ;  $(-)$  : B ;  $(-)$  : C ;  $(-)$  : D (voir le tableau F.1).

case	$\phi_m$
A	0.617
B	0.624
C	0.614
D	0.617

**TABLE F.4** – Fraction volumique de blocage (jamming)  $\phi_m$  (équation (5.60)) pour les quatre cas A, B, C et D (voir le tableau F.1).

On peut voir sur la figure F.3 que les quatre cas possèdent effectivement sensiblement la même viscosité apparente pour  $\phi \leq 0.5$ . Pour les plus grandes valeurs de  $\phi$ , la prise de moyenne temporelle dans une zone quasi-statique de lit de grains ne permet plus d'obtenir de bonnes statistiques temporelles et alors des fluctuations dépendant de la microstructure du lit de grains sont visibles. Le seul cas possédant une viscosité de la phase de mélange légèrement différente (et inférieure) pour  $\phi \simeq 0.5$  est le cas B, pour le plus grand domaine de simulation. Ce cas permet d'obtenir des meilleures prises de moyenne spatiale (la moyenne spatiale est plus proche de la moyenne d'ensemble dans ce cas là) et est donc moins dépendante de la qualité des statistiques temporelles.

Si on se penche sur les valeurs de  $\phi_m$  données dans le tableau F.4, on constate qu'elles dépendent principalement de la taille du domaine de simulation. On peut aussi remarquer que les valeurs obtenues ici, via des ajustements de la relation (5.60), sont pratiquement égales aux valeurs de  $\phi_c$  obtenues pour la rhéologie de la phase granulaire ; un seul paramètre semble alors nécessaire.

Finalement, on peut noter que dans l'ensemble, les résultats obtenus sont peu dépendants de la taille du domaine et du raffinement du maillage. On observe une légère amélioration pour la phase fluide lorsqu'on raffine davantage le maillage et une légère amélioration pour la phase granulaire lorsqu'on augmente la taille du domaine. Ces deux solutions sont très coûteuses en temps de calcul et on se limite donc au cas A dans toute l'étude menée lors de ce travail de thèse. Enfin, l'épaisseur des frontières IBM, qui a une influence non négligeable à l'échelle du grain (échelle microscopique) semble ne pas avoir d'effet significatif sur les propriétés rhéologiques effectives à l'échelle mésoscopique. En effet, on a vu dans la section 3.4 que le débit de grains diminuait significativement lorsqu'on réduisait l'épaisseur physique des frontières immergées  $\Delta/d$  mais ici, nous obtenons la même rhéologie apparente que pour le cas C. On peut expliquer ce phénomène en considérant les

effets de lubrification (la partie de ces effets captée par le maillage). La zone où  $0.5 \leq \alpha \leq 1$  ( $\alpha$  étant la fraction volumique locale de solide) peut être vue comme des rugosités (le fluide peut s'écouler dedans, mais le contact a tout de même lieu au niveau des positions théoriques des interfaces des grains), et donc réduire l'épaisseur des frontières immergées  $\Delta/d$  peut être assimilé à l'utilisation de particules moins rugueuses; or on a vu dans la section 4.4 que l'implémentation des effets de lubrification réduisait fortement le débit de grains. On peut alors supposer que l'ajout de ces forces n'influencera que très peu la rhéologie apparente des différentes phases équivalentes (et que cela modifie donc les profils de vitesse et de contrainte tout en conservant la même rhéologie).

## G Influence de l'épaisseur $h_g$ sur les contraintes apparentes à l'échelle mésoscopique

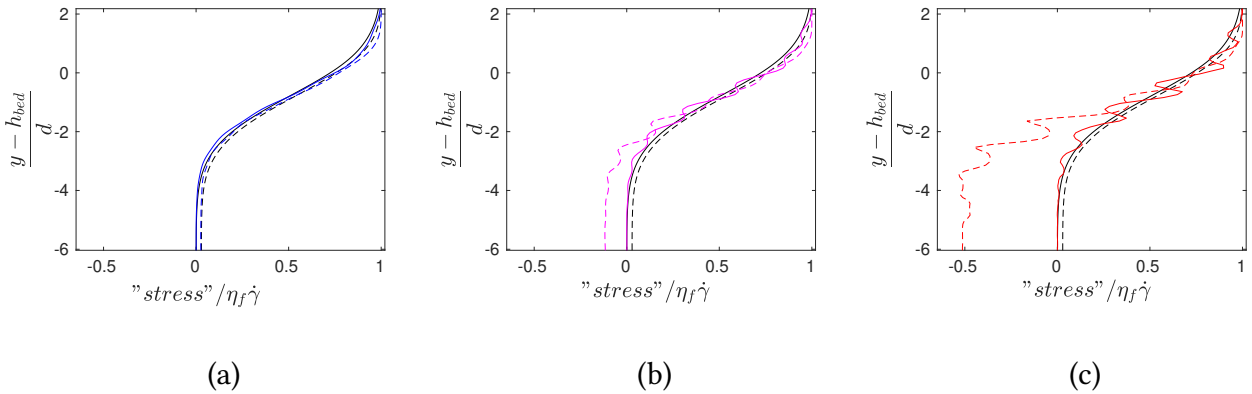
On a présenté les contraintes apparentes pour  $h_g = d$  dans la section 5.2. On souhaite utiliser la plus petite valeur possible de  $h_g$  afin d'être le plus précis possible. Dans cette annexe, on se propose d'étudier l'influence de l'épaisseur caractéristique du VER  $h_g$  sur les contraintes apparentes obtenues.

### Phase fluide - direction verticale

L'influence de l'épaisseur caractéristique du VER  $h_g$  sur la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^f$  apparente dans la phase équivalente fluide a été présentée dans la section 5.2.2.

### Phase fluide - sens de l'écoulement

La figure G.1 présente la contrainte de cisaillement  $\Sigma_{xy}^f$  obtenues pour les différentes valeurs de  $h_g$  considérées.

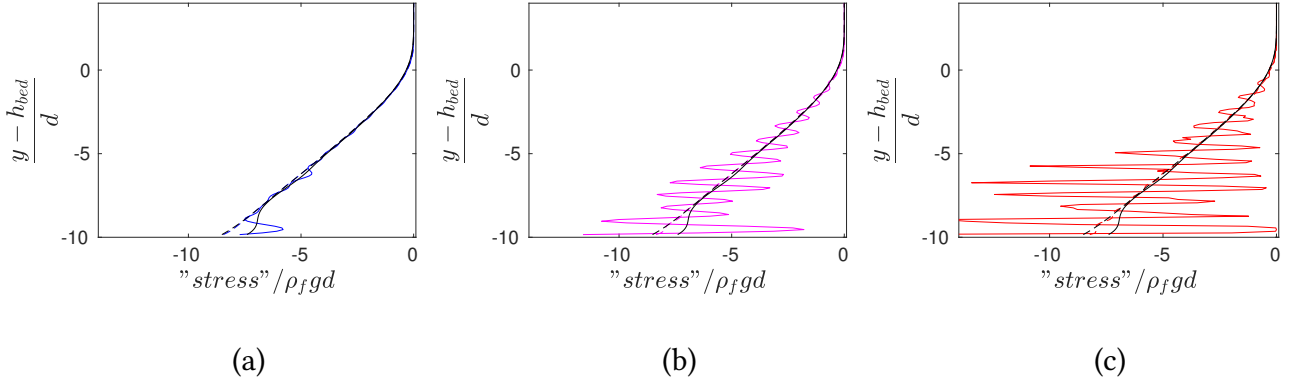


**FIGURE G.1** – Contrainte de cisaillement apparente dans la phase fluide  $\Sigma_{xy}^f$  pour (a) :  $h_g = d/2$ ; (b) :  $h_g = d/4$ ; (c)  $h_g = d/10$ . L'intégrale  $\int \frac{1}{\epsilon} (\epsilon \rho_f \langle u_y \rangle^f \frac{\partial \langle u_y \rangle^f}{\partial y} + n \langle f_1 \rangle_y^p) dy'$  est aussi représentée en pointillés. Sur chaque graphe, le cas de référence pour  $h_g = d$  est aussi tracé.

La figure G.1 montre que la contrainte de cisaillement apparente dans la phase fluide oscille dans la couche de grains mobiles, et ce d'autant plus que l'épaisseur  $h_g$  est faible. Pour  $h_g = d/2$ , l'erreur commise reste du même ordre de grandeur que pour  $h_g = d$  mais pour les valeurs plus faibles, elle augmente fortement et atteint environ 50% de la contrainte  $\eta_f \dot{\gamma}$  pour  $h_g = d/10$ .

### Phase granulaire - direction verticale

La figure G.2 présente la contrainte normale  $\Sigma_{yy}^p$  obtenues pour les différentes valeurs de  $h_g$  considérées.

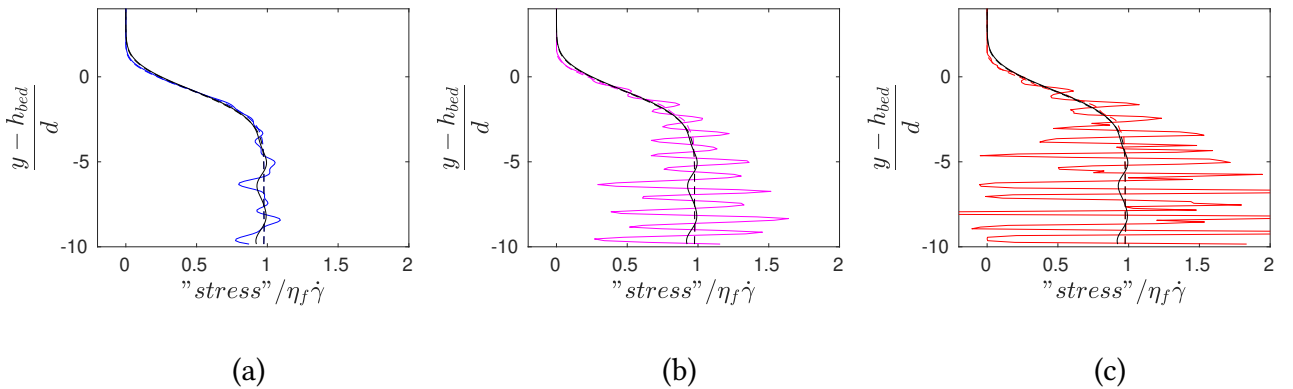


**FIGURE G.2** – Contrainte normale apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{yy}^p$  pour (a) :  $h_g = d/2$ ; (b) :  $h_g = d/4$ ; (c)  $h_g = d/10$ . L'intégrale  $\int (\phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_y \rangle^p}{\partial y} - \phi \frac{\partial \Sigma_{yy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_y^p - \rho_p \phi g_y) dy'$  est aussi représentée en pointillés. Sur chaque graphe, le cas de référence pour  $h_g = d$  est aussi tracé en noir.

La figure G.2 montre que la contrainte normale apparente dans la phase granulaire oscille dans le lit de grains, et ce d'autant plus que l'épaisseur  $h_g$  est faible. On peut remarquer que, contrairement à la phase fluide, l'erreur augmente lorsque  $h_g$  diminue mais que la contrainte apparente et l'intégrale des autres termes restent (en moyenne) superposés. Pour  $h_g = d/2$ , l'erreur commise est du même ordre de grandeur que pour  $h_g = d$  mais pour les valeurs plus faibles, elle augmente fortement et peut devenir localement du même ordre de grandeur que la contrainte mesurée  $\Sigma_{xy}^p$  pour  $h_g = d/10$ .

### Phase granulaire - sens de l'écoulement

La figure G.3 présente la contrainte de cisaillement  $\Sigma_{xy}^p$  obtenues pour les différentes valeurs de  $h_g$  considérées.



**FIGURE G.3** – Contrainte de cisaillement apparente dans la phase granulaire  $\Sigma_{xy}^p$  pour (a) :  $h_g = d/2$ ; (b) :  $h_g = d/4$ ; (c)  $h_g = d/10$ . L'intégrale  $\int (\phi \rho_p \langle u_y \rangle^p \frac{\partial \langle u_x \rangle^p}{\partial y} - \phi \frac{\partial \Sigma_{xy}^f}{\partial y} - n \langle f_1 \rangle_x^p) dy'$  est aussi représentée en pointillés. Sur chaque graphe, le cas de référence pour  $h_g = d$  est aussi tracé en noir.

La figure G.3 montre que la contrainte de cisaillement apparente dans la phase granulaire oscille dans le lit de grains, et ce d'autant plus que l'épaisseur  $h_g$  est faible. Plus  $h_g$  diminue, plus l'erreur commise augmente, jusqu'à devenir du même ordre de grandeur que la contrainte la contrainte  $\eta_f \dot{\gamma}$  pour  $h_g = d/10$ . Ici aussi, la contrainte calculée et l'intégrale des autres termes de l'équation (5.32) restent centrés l'un sur l'autre contrairement au cas de la phase fluide.

### Conclusion

Les équations mésoscopiques (5.17) et (5.18) ont été obtenues sous l'hypothèse que  $d \ll h_g$ . Pour



$h_g \leq d/4$  on ne vérifie plus cette hypothèse et le terme  $\mathcal{O}\left(\left(\frac{d}{L}\right)^2\right)$  n'est alors plus négligeable.

On peut noter que les erreurs commises le sont principalement dans le lit statique pour la phase granulaire et dans la couche mobile pour la phase fluide. On peut interpréter cette différence en supposant que les erreurs commises pour la phase granulaire sont principalement dues aux limites de l'approche par prise de moyennes temporelles dans la zone statique du lit et que, pour la phase fluide, les erreurs proviennent plutôt de la méthode de résolution de l'écoulement microscopique. Le comportement décrit précédemment, pour les phases fluide et granulaire, reste le même quelque soit les valeurs du nombre de Reynolds particulaire  $Re_p$  et du nombre de Shields  $\theta$  (pour les valeurs considérées de ces nombres). Nous devons donc faire un compromis entre la résolution spatiale (en particulier au niveau de la surface du lit de grain) et la possibilité d'homogénéiser le problème via la méthode présentée ici, en maintenant les erreurs à un niveau raisonnable.

# Bibliographie

- ANDREOTTI, B., Y. FORTERRE et O. POULIQUEN. 2012, *Les milieux granulaires : Entre fluide et solide*, EDP sciences.
- AUSSILLOUS, P., J. CHAUCHAT, M. PAILHA, M. MÉDALE et É. GUAZZELLI. 2013, «Investigation of the mobile granular layer in bedload transport by laminar shearing flows», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 736, p. 594–615.
- BAGNOLD, R. A. 1954, «Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 225, n° 1160, p. 49–63.
- BAGNOLD, R. A. 1956, «The flow of cohesionless grains in fluids», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 249, n° 964, p. 235–297.
- BAK, P., C. TANG et K. WIESENFELD. 1987, «Self-organized criticality : An explanation of the  $1/f$  noise», *Physical Review Letters*, vol. 59, p. 381–384.
- BAK, P., C. TANG et K. WIESENFELD. 1988, «Self-organized criticality», *Physical Review A*, vol. 38, p. 364–374.
- BARAN, O., D. ERTAŞ, T. C. HALSEY, G. S. GREST et J. B. LECHMAN. 2006, «Velocity correlations in dense gravity-driven granular chute flow», *Physical Review E*, vol. 74, p. 051–302.
- BASSET, A. B. 1888, *A treatise on hydrodynamics : with numerous examples*, vol. 2, Deighton, Bell and Company.
- BACHELOR, G. et J. GREEN. 1972, «The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order  $c^2$ », *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 56, n° 3, p. 401–427.
- BATES, L. 2006, «Bulk solids characterisation-the need for industrial education in bulk technology», *Bulk Solids Handling*, vol. 26, n° 7, p. 464–475.
- BIGOT, B., T. BONOMETTI, L. LACAZE et O. THUAL. 2014, «A simple immersed-boundary method for solid–fluid interaction in constant- and stratified-density flows», *Computers & Fluids*, vol. 97, p. 126–142.
- BOGDAN, V. et C. C. MEI. 2010, *Homogenization Methods For Multiscale Mechanics*, World Scientific Publishing Company, ISBN 9789814466967.
- BOLTZMANN, L. E. 1871, *Einige allgemeine sätze über Wärmegleichgewicht*, K. Akademie der Wissenschaften (Wien).
- BOTTARO, A. 2019, «Flow over natural or engineered surfaces : an adjoint homogenization perspective», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 877.

- BOUTELOUP, J. 2017, *Simulation numérique de la dynamique d'un lit granulaire cisailé par un fluide visqueux*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP).
- BOYER, F. M. C., E. GUZZELLI et O. POULIQUEN. 2011, «Unifying suspension and granular rheology», *Physical Review Letters*, vol. 107, p. 188–301.
- BRENNER, H. 1961, «The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface», *Chemical Engineering Science*, vol. 16, n° 3-4, p. 242–251.
- BRINKMAN, H. 1947, «A calculation of the viscosity and the sedimentation constant for solutions of large chain molecules taking into account the hampered flow of the solvent through these molecules», *Physica*, vol. 13, p. 447–448.
- BUCKINGHAM, E. 1914, «On physically similar systems ; illustrations of the use of dimensional equations», *Physical Review*, vol. 4, n° 4, p. 345.
- BUFFINGTON, J. M. et D. R. MONTGOMERY. 1997, «A systematic analysis of eight decades of incipient motion studies, with special reference to gravel-bedded rivers», *Water Resources Research*, vol. 33, n° 8, p. 1993–2029.
- CALMET, I. 1995, *Analyse par simulation des grandes échelles des mouvements turbulents et du transfert de masse sous une interface plane*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP).
- CARMAN, P. C. 1939, «Permeability of saturated sands, soils and clays», *The Journal of Agricultural Science*, vol. 29, n° 2, p. 262–273.
- CASSAR, C., M. NICOLAS et O. POULIQUEN. 2005, «Submarine granular flows down inclined planes», *Physics of Fluids*, vol. 17, n° 10, p. 103–109.
- CHARRU, F., H. MOUILLERON et O. EIFF. 2004, «Erosion and deposition of particles on a bed sheared by a viscous flow», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 519, p. 55–80.
- CHARRU, F. et H. MOUILLERON-ARNOULD. 2002, «Instability of a bed of particles sheared by a viscous flow», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 452, p. 303–323.
- CHOUÏPPE, A. 2012, *Étude numérique de la réduction de traînée par injection de bulles en écoulement de Taylor-Couette*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP).
- CLIFT, R., J. R. GRACE et M. E. WEBER. 2005, *Bubbles, drops, and particles*, Courier Corporation.
- CLIMENT, E. et M. R. MAXEY. 2009, «The force coupling method : a flexible approach for the simulation of particulate flows», .
- CRUZ, F. D., F. CHEVOIR, J.-N. ROUX et I. IORDANOFF. 2003, «Macroscopic friction of dry granular materials», dans *Transient Processes in Tribology, Tribology Series*, vol. 43, édité par G. Dalmaz, A. Lubrecht, D. Dowson et M. Priest, Elsevier, p. 53 – 61.
- CUNDALL, P. et O. STRACK. 1979, «A discrete numerical model for granular assemblies», *Géotechnique*, vol. 29, p. 47–65.
- DA CRUZ, F., S. EMAM, M. PROCHNOW, J.-N. ROUX et F. M. C. CHEVOIR. 2005, «Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows», *Physical Review E*, vol. 72, p. 021–309.

- D'ALBIGNAC, S. 2012, «Eulerian-lagrangian simulation of sediment transport. internship», *Ocean Engineering Laboratory, University of Delaware, USA*.
- DALTON, F. et D. CORCORAN. 2001, «Self-organized criticality in a sheared granular stick-slip system», *Physical Review E*, vol. 63, n° 6, p. 061–312.
- DARCY, H. P. G. 1856, *Détermination des lois d'écoulement de l'eau à travers le sable*.
- DERKSEN, J. J. 2011, «Simulations of granular bed erosion due to laminar shear flow near the critical shields number», *Physics of Fluids*, vol. 23, n° 11, p. 113–303.
- DREW, D. A. et R. T. LAHEY. 1993, «Analytical modelling of multiphase-flow», dans *Particulate Two-Phase Flows*, édité par M. Roco, chap. 16, p. 509–566, Butterworth-Heinemann, Boston, Mass.
- DURAN, J. 1997, *Sables, poudres et grains*, Eyrolles.
- DURÁN, O., B. ANDREOTTI et P. CLAUDIN. 2012, «Numerical simulation of turbulent sediment transport, from bed load to saltation», *Physics of Fluids*, vol. 24, n° 10, p. 103 306.
- DURÁN, O., B. ANDREOTTI et P. CLAUDIN. 2014, «Turbulent and viscous sediment transport - a numerical study», *Advances in Geosciences*, vol. 37, p. 73–80.
- EINSTEIN, A. 1906, «Eine neue bestimmung der moleküldimensionen (in german)», *Annalen der Physik (Leipzig)*, vol. 19, p. 289. URL <https://einsteinpapers.press.princeton.edu/vol2-trans/118>, pour une traduction en anglais.
- EINSTEIN, A. 1911, «Correction of the paper 'eine neue bestimmung der moleküldimensionen (1906) (in german)'», *Annalen der Physik (Leipzig)*, vol. 34, p. 591.
- FANG, X., J. TANG et H. LUO. 2007, «Granular damping analysis using an improved discrete element approach», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 308, n° 1, p. 112–131.
- FAXÉN, H. 1922, «Der widerstand gegen die bewegung einer starren kugel in einer zähen flüssigkeit, die zwischen zwei parallelen ebenen wänden eingeschlossen ist», *Annalen der Physik*, vol. 373, n° 10, p. 89–119.
- FRETTE, V., K. CHRISTENSEN, A. MALTHER-SØRENSEN, J. FEDER, T. JØSSANG et P. MEAKIN. 1996, «Avalanche dynamics in a pile of rice», *Nature*, vol. 379, n° 6560, p. 49.
- GDR MiDI. 2004, «On dense granular flows», *The European Physical Journal E*, vol. 14, n° 4, p. 341–365.
- GIBILARO, L., K. GALLUCCI, R. DI FELICE et P. PAGLIAI. 2007, «On the apparent viscosity of a fluidized bed», *Chemical Engineering Science*, vol. 62, n° 1-2, p. 294–300.
- GUAZZELLI, É. et J. F. MORRIS. 2011, *A Physical Introduction to Suspension Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 9780511894671.
- HERTZ, H. 1881, «Über die berührung fester elastischer körper (sur le contact entre corps élastiques)», *J. für reine und angewandte Mathematik*, vol. 92, p. 156–171.
- IKENO, T. et T. KAJISHIMA. 2007, «Finite-difference immersed boundary method consistent with wall conditions for incompressible turbulent flow simulations», *Journal of Computational Physics*, vol. 226, n° 2, p. 1485–1508.

- IZARD, E. 2011, «Méthodes de frontières immergées pour la modélisation d'écoulements environnementaux : détection et modélisation des contacts», Mémoire de Master 2, Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse.
- IZARD, E. 2014, *Modélisation numérique des écoulements granulaires denses immergés dans un fluide*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP).
- JACKSON, R. 1997, «Locally averaged equations of motion for a mixture of identical spherical particles and a Newtonian fluid», *Chemical Engineering Science*, vol. 52, n° 15, p. 2457–2469.
- JACKSON, R. 2000, *The Dynamics of Fluidized Particles*, Cambridge University Press - Cambridge Monographs on Mechanics.
- JIA, X., C. CAROLI et B. VELICKY. 1999, «Ultrasound propagation in externally stressed granular media», *Physical Review Letters*, vol. 82, n° 9, p. 18–63.
- JOHNSON, K. L. et K. L. JOHNSON. 1987, *Contact mechanics*, Cambridge University Press.
- KEMPE, T. et J. FRÖHLICH. 2012, «An improved immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particle laden flows», *Journal of Computational Physics*, vol. 231, n° 9, p. 3663–3684.
- KIDANEMARIAM, A. et M. UHLMANN. 2014a, «Direct numerical simulation of pattern formation in subaqueous sediment», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 750, p. R2.
- KIDANEMARIAM, A. G. et M. UHLMANN. 2014b, «Interface-resolved direct numerical simulation of the erosion of a sediment bed sheared by laminar channel flow», *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 67, p. 174–188.
- KIM, S. et S. J. KARRILA. 2013, *Microhydrodynamics : principles and selected applications*, Courier Corporation.
- KOLMOGOROV, A. 1936, «Theory of markov chains», *Annal. Mathematics*, vol. 112, p. 155–160.
- KRIEGER, I. M. et T. J. DOUGHERTY. 1959, «A mechanism for non-Newtonian flow in suspensions of rigid spheres», *Transactions of the Society of Rheology*, vol. 3, n° 1, p. 137–152.
- KRUGGEL-EMDEN, H., M. STURM, S. WIRTZ et V. SCHERER. 2008, «Selection of an appropriate time integration scheme for the discrete element method (DEM)», *Computers & Chemical Engineering*, vol. 32, n° 10, p. 2263–2279.
- LACAZE, L., J. BOUTELOUP, B. FRY et E. IZARD. 2020, «Immersed granular collapse : Numerical modelling», .
- LECORNU, L. 1908, *Dynamique appliquée*, Bibliothèque de mécanique appliquée et génie, O. Doin.
- LEE, D.-G. et H.-Y. KIM. 2011, «Sinking of small sphere at low Reynolds number through interface», *Physics of Fluids*, vol. 23, n° 7, p. 072–104.
- LEIGHTON, D. et A. ACRIVOS. 1986, «Viscous resuspension», *Chemical Engineering Science*, vol. 41, n° 6, p. 1377–1384.
- LUO, X., M. R. MAXEY et G. E. KARNIADAKIS. 2009, «Smoothed profile method for particulate flows : Error analysis and simulations», *Journal of Computational Physics*, vol. 228, n° 5, p. 1750–1769.
- MANDELBROT, B. 1983, *The fractal geometry of nature*, vol. 173, WH Freeman New York.

- MAXWELL, J. C. 1879, *On Boltzmann's theorem on the average distribution of energy in a system of material points*, Printed at the University Press.
- MEI, C. C. et B. VERNESCU. 2010, *Homogenization methods for multiscale mechanics*, World Scientific.
- MITTAL, R. et G. IACCARINO. 2005, «Immersed boundary methods», *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 37, p. 239–261.
- MODARESSI, A., S. BOUFELLOUH et P. EVESQUE. 1999, «Modeling of stress distribution in granular piles : Comparison with centrifuge experiments», *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 9, n° 3, p. 523–543.
- MOHD-YUSOF, J. 1997, «For simulations of flow in complex geometries», *Annual Research Briefs*, vol. 317.
- MORDANT, N. et J.-F. PINTON. 2000, «Velocity measurement of a settling sphere», *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 18, n° 2, p. 343–352.
- MOUILLERON, H., F. CHARRU et O. EIFF. 2009, «Inside the moving layer of a sheared granular bed», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 628, p. 229–239.
- MOUILLERON-ARNOULD, H. 2002, *Instabilité d'un milieu granulaire cisailé par un fluide*, thèse de doctorat, Université Toulouse 3.
- MOURAILLE, O. et S. LUDING. 2008, «Sound wave propagation in weakly polydisperse granular materials», *Ultrasonics*, vol. 48, n° 6-7, p. 498–505.
- NAKAYAMA, Y. et R. YAMAMOTO. 2005, «Simulation method to resolve hydrodynamic interactions in colloidal dispersions», *Physical Review E*, vol. 71, n° 3, p. 036–707.
- NAVIER, C. L. M. H. 1823, «Mémoire sur les lois du mouvement des fluides», *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, vol. 6, n° 1823, p. 389–440.
- NEWTON, I. et E. HALLEY. 1780, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 62, Jussu Societatis Regiae ac typis Josephi Streater, prostant venales apud Sam Smith. Traduction française de Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil, marquise du Châtelet.
- OURIEMI, M., P. AUSSILLOUS et E. GUZZELLI. 2009, «Sediment dynamics. Part 1. bed-load transport by laminar shearing flows», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 636, p. 295–319.
- OURIEMI, M., P. AUSSILLOUS, M. MEDALE, Y. PEYSSON et É. GUZZELLI. 2007, «Determination of the critical shields number for particle erosion in laminar flow», *Physics of Fluids*, vol. 19, n° 6, p. 061 706.
- PAINTAL, A. 1971, «Concept of critical shear stress in loose boundary open channels», *Journal of Hydraulic Research*, vol. 9, n° 1, p. 91–113.
- PATANKAR, N. A. et H. H. HU. 2002, «Finite Reynolds number effect on the rheology of a dilute suspension of neutrally buoyant circular particles in a Newtonian fluid», *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 28, n° 3, p. 409 – 425.
- PESKIN, C. S. 1972, «Flow patterns around heart valves : a numerical method», *Journal of Computational Physics*, vol. 10, n° 2, p. 252–271.
- PIERSON, J.-L. 2015, *Traversée d'une interface entre deux fluides par une sphère*, thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse (Toulouse INP).

- PÖSCHEL, T. et T. SCHWAGER. 2005, *Computational granular dynamics : models and algorithms*, Springer Science & Business Media.
- PROCTER, D. et R. BARTON. 1974, «Measurements of the angle of interparticle friction», *Geotechnique*, vol. 24, n° 4, p. 581–604.
- RAILLARD, O., P. LE HIR et P. LAZURE. 1994, «Transport de sédiments fins dans le bassin de marennes-oléron : mise en place d'un modèle mathématique», *La Houille Blanche*, , n° 4, p. 63–71.
- RICHARDSON, J. et W. ZAKI. 1954, «The sedimentation of a suspension of uniform spheres under conditions of viscous flow», *Chemical Engineering Science*, vol. 3, n° 2, p. 65–73.
- SADD, M. H., G. ADHIKARI et F. CARDOSO. 2000, «DEM simulation of wave propagation in granular materials», *Powder Technology*, vol. 109, n° 1-3, p. 222–233.
- SEO, J. H. et R. MITTAL. 2011, «A sharp-interface immersed boundary method with improved mass conservation and reduced spurious pressure oscillations», *Journal of Computational Physics*, vol. 230, n° 19, p. 7347–7363.
- SHÄFER, J., S. DIPPEL et D. WOLF. 1996, «Force schemes in simulations of granular materials», *Journal de Physique I France*, vol. 6, n° 1, p. 5–20.
- SHIELDS, A. 1936, «Application of similarity principles and turbulence research to bed-load movement», .
- SLATTERY, J. C. 1967, «Flow of viscoelastic fluids through porous media», *AIChE Journal*, vol. 13, n° 6, p. 1066–1071.
- SOMFAI, E., J.-N. ROUX, J. H. SNOEIJER, M. VAN HECKE et W. VAN SAARLOOS. 2005, «Elastic wave propagation in confined granular systems», *Physical Review E*, vol. 72, p. 021–301.
- STUDENT. 1908, «The probable error of a mean», *Biometrika*, p. 1–25. William Gosset.
- TAYLOR, G. I. 1953, «Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 219, n° 1137, p. 186–203.
- TENNETI, S., R. GARG et S. SUBRAMANIAM. 2011, «Drag law for monodisperse gas–solid systems using particle-resolved direct numerical simulation of flow past fixed assemblies of spheres», *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 37, n° 9, p. 1072–1092.
- TRULSSON, M., B. ANDREOTTI et P. CLAUDIN. 2012, «Transition from the viscous to inertial regime in dense suspensions», *Physical Review Letters*, vol. 109, p. 118–305.
- UHLMANN, M. 2003, «First experiments with the simulation of particulate flows», cahier de recherche, Centro de Investigaciones Energeticas.
- UHLMANN, M. 2005, «An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows», *Journal of Computational Physics*, vol. 209, n° 2, p. 448–476.
- VANONI, V., P. BENEDICT, D. BONDURANT, J. MCKEE, R. PIEST et J. SMALLSHAW. 1966, «Sediment transportation mechanics : Initiation of motion», *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 92, n° 2, p. 291–314.
- WHITAKER, S. 1986, «Flow in porous media i : A theoretical derivation of darcy's law», *Transport in Porous Media*, vol. 1, n° 1, p. 3–25.

- WHITAKER, S. 2013, *The method of volume averaging*, vol. 13, Springer Science & Business Media.
- WHITE, C. 1940, «The equilibrium of grains on the bed of a stream», *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 174, n° 958, p. 322–338.
- YALIN, M. S. et E. KARAHAN. 1979, «Inception of sediment transport», *Journal of the Hydraulics Division*, vol. 105, n° 11, p. 1433–1443.
- YUKI, Y., S. TAKEUCHI et T. KAJISHIMA. 2007, «Efficient Immersed Boundary Method for Strong Interaction Problem of Arbitrary Shape Object with the Self-Induced Flow», *Journal of Fluid Science and Technology*, vol. 2, p. 1–11.
- ZAMPOGNA, G. A. et A. BOTTARO. 2016, «Fluid flow over and through a regular bundle of rigid fibres», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 792, p. 5–35.
- ZENG, L., F. NAJJAR, S. BALACHANDAR et P. FISCHER. 2009, «Forces on a finite-sized particle located close to a wall in a linear shear flow», *Physics of Fluids*, vol. 21, n° 3, p. 033–302.
- ZHANG, D. et A. PROSPERETTI. 1994, «Averaged equations for inviscid disperse two-phase flow», *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 267, p. 185–219.
- ZHANG, D. et A. PROSPERETTI. 1997, «Momentum and energy equations for disperse two-phase flows and their closure for dilute suspensions», *International Journal of Multiphase Flow*, vol. 23, n° 3, p. 425–453.
- ZUBER, N. 1964, «On the dispersed two-phase flow in the laminar flow regime», *Chemical Engineering Science*, vol. 19, n° 11, p. 897–917.